ORSAY
N° d'ordre 2952

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

pour obtenir

le titre de Docteur 3ème cycle

spécialité : Mathématiques Pures

par

M. Michel ZINSMEISTER

Sujet : ESPACES DE HARDY GENERALISES.

Soutenue le 4 Février 1981 devant la Commission d'examen :

MM.	L. SCHWARTZ	Président
	A. GUICHARDET	Examinateurs
	Y. MEYER	Examinateurs

ORSAY
N° d'ordre

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

T H E S E

présentée

pour obtenir

le titre de Docteur 3ème cycle

spécialité : Mathématiques Pures

par

M. Michel ZINSMEISTER

Sujet : ESPACES DE HARDY GENERALISES.

Soutenue le 4 Février 1981 devant la Commission d'examen :

MM.	L. SCHWARTZ	Président
	A. GUICHARDET	Examinateurs
	Y. MEYER	Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

C'est Yves Meyer qui m'a initié à la recherche et m'a suggéré ce travail. Je voudrais ici le remercier vivement pour toute l'aide et tous les conseils qu'il m'a donnés avec une infinie patience tout au long de la préparation de cette thèse.

Je remercie chaleureusement MM. Laurent Schwartz et Alain Guichardet qui ont bien voulu s'intéresser à mon travail et m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury.

Pendant mon bref séjour au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, j'ai été particulièrement sensible à l'ambiance amicale qui y régnait. Je voudrais ici remercier les membres de ce centre pour l'accueil qu'ils m'ont réservé.

Enfin je tiens à remercier tout particulièrement Marie-Jo Lécuyer et Dominique Concha pour le soin qu'ils ont apporté à la frappe et au tirage de cette thèse.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547321_0033

I N T R O D U C T I O N

L'objet de ce travail est de développer une théorie des espaces de Hardy associés à une courbe de Jordan rectifiable du plan complexe vérifiant différentes propriétés. Nous désignerons par Γ une courbe de Jordan fermée et par Ω_1 et Ω_2 respectivement l'intérieur et l'extérieur de Γ au sens du théorème de Jordan. Nous supposerons toujours Γ rectifiable de longueur 2π et $s \to z(s)$ désignera une paramétrisation normale 2π-périodique de Γ. De plus nous supposerons que 0 appartient à Ω_1. Enfin D désigne le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{E} = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$.

La première partie est un exposé de tous les résultats classiques sur les espaces $H^p(\Omega_1)$ et $H^p(\Omega_2)$ lorsqu'on ne suppose rien d'autre sur Γ que d'être rectifiable. L'existence presque partout de l'intégrale singulière de Cauchy $Tf(z)$ pour $f \in L^1(\Gamma)$ est une conséquence qualitative du théorème de Calderón ([4]). Les porpositions 4, 5, 6, 7 font apparaître l'importance de cet opérateur T ainsi que des transformations conformes Φ_1 et Φ_2 (de D sur Ω_1 et $\mathcal{E}$ sur Ω_2 respectivement) dans l'étude des espaces de Hardy $H^p(\Omega_1)$ et $H^p(\Omega_2)$. Nous montrons en particulier que la condition de Smirnov (Φ_1' et Φ_2' extérieures) est nécessaire pour assurer une théorie cohérente de ces espaces. Le théorème 1 est le seul résultat nouveau de cette partie. Il établit le lien entre cette théorie classique et le théorème de Calderón. Nous remarquons en particulier que la condition de Smirnov est nécessaire pour que T soit borné sur $L^2(\Gamma)$.

Dans la seconde partie, nous supposons que Γ vérifie une condition corde-arc du type

$$\overset{\frown}{MN} \leq C\, MN$$

où $\overset{\frown}{MN}$ désigne la plus petite des longueurs des deux sous-arcs joignant M et N. Keldysh et Lavrent'ev [18] ont montré que la condition de

Smirnov est alors vérifiée. Le théorème 2 est alors une légère amélioration d'un résultat de Pommerenke qui était d'ailleurs implicite dans son papier [22] à savoir que $|\Phi_i'(z)|$ appartient à $A^\infty(\partial D)$, la classe de Muckenhoupt. Du théorème 2 nous déduisons principalement deux résultats :

1) une caractérisation de $H^p(\Omega_1)$ $(0 < p < \infty)$ à l'aide d'une fonction maximale.

2) Nous introduisons l'espace $H^1(\Gamma)$ "atomique" et son dual $BMO(\Gamma)$ et nous établissons le lien entre $H^1(\Gamma)$ et $H^1(\Omega_i)$ (respectivement entre $BMO(\Gamma)$ et $BMOA(\Omega_i) = H^1(\Omega_i) \cap BMO(\Gamma)$) analogue à celui qui existe entre $L^p(\Gamma)$ et $H^p(\Omega_i)$ $(p \geq 1)$ et qui a été étudié dans le I.

Nous développons ensuite des méthodes de variable réelle pour l'opérateur T qui conduisent au théorème 4 donnant, pour les courbes vérifiant la condition corde-arc, 4 énoncés équivalents du théorème de Calderón en remplaçant L^2 par L^p pour $p > 1$, par $H^1(\Gamma)$ ou encore par $BMO(\Gamma)$.

Le théorème 5 conclut cette partie. Il donne une caractérisation de $H^1(\Gamma)$ par l'intégrale singulière T pour les courbes vérifiant la condition corde-arc telles que T soit borné sur $L^2(\Gamma)$.

La troisième partie est consacrée à l'étude d'une famille de courbes de Jordan vérifiant la condition corde-arc et telles que T soit borné sur $L^2(\Gamma)$. Ces courbes, que nous appelons presque régulières sont définies par la proporiété

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall M, N \in \Gamma \quad MN \leq \eta \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{MN}}{MN} - 1 \leq \varepsilon$$

Nous montrons d'abord que Γ est presque régulière si et seulement s'il existe $\beta \in VMO(\mathbb{T})$ telle que

$$z'(t) = e^{it} e^{i\beta(t)} \quad \text{p.p.}$$

Grâce à cette caractérisation nous pouvons appliquer localement à l'aide d'une partition de l'unité un théorème de Coifman et Meyer ([20]) et nous en déduisons que T est borné sur L^2. Nous donnons également une caractérisation des courbes presque régulières à l'aide de la transformation conforme, à savoir

$$(\Gamma \text{ presque régulière}) \Leftrightarrow \operatorname{Log} \Phi_1' \in VMOA(D) \quad ,$$

ce qui prouve en particulier que $|\varphi_1'|$ appartient à tous les $A^p(\partial D)$ pour $p > 1$ si Γ est presque régulière. Nous terminons en donnant deux applications de ce dernier résultat qui généralisent respectivement des résultats de Pommerenke et Dahlberg ([22], [7])

1) Soit $F \in H^2(\Omega_1)$ et $G \in BMOA(\Omega_1)$. Si $H(0) = 0$ et $H'(z) = F(z)G'(z)$ pour $z \in \Omega_1$, alors

$$\| H \|_{H^2(\Omega_1)} \leq C \| F \|_{H^2(\Omega_1)} \| G \|_{BMOA(\Omega_1)}$$

2) $$F \in H^2(\Omega_1) \Longleftrightarrow \iint_{\Omega_1} |F'(z)|^2 \, d(z, \Gamma) \, dz \, d\bar{z} < +\infty$$

Avant de rentrer dans le vif du sujet signalons quelques problèmes ouverts connexes à ce travail :

1) Pour une courbe Γ vérifiant la condition corde-arc, on peut définir les espaces de Hardy "atomiques" $H^p(\Gamma)$ pour $0 < p < 1$. Quel est alors le lien entre $H^p(\Gamma)$ et les $H^p(\Omega_i)$? Sachant que dans le cas du disque il faut regarder H^p atomique comme un espace de distributions, on a une idée de la difficulté même si Γ est de classe C^1.

2) Une conjecture naturelle est que toute courbe vérifiant la condition corde-arc vérifie le théorème de Calderón. Le seul résultat allant (peut-être) dans la direction de ce théorème est l'appendice 2 donnant une méthode d'approximation des courbes corde-arc par des courbes de classe C^∞ vérifiant uniformément la condition corde-arc mais toutes les tentatives d'imitation des démonstrations du théorème de Calderón "classique" se sont révélées vaines.

Remarquons que ce résultat démontré dans l'appendice 2 utilise les résultats d'Ahlfors ([1]) sur les réflexions quasiconformes - les courbes vérifiant la condition corde-arc sont en effet des cas particuliers de quasi-cercles introduits par cet auteur.
Il est vraisemblable que cette théorie doive jouer un grand rôle dans l'élucidation de la conjecture précitée. En particulier, la réponse au problème posé par Ahlfors dans [1], à savoir : trouver une caractérisation de quasicercles par la transformation conforme, donnerait un nouvel éclairage au problème (on en déduirait facilement une caracté-

risation des courbes corde-arc).

Signalons enfin que pendant la rédaction de cette thèse nous avons eu connaissance de résultats récents de C.E. Kenig et D.S. Jerison recoupant largement les résultats de ce travail.

I - GENERALITES SUR LES ESPACES DE HARDY ASSOCIES A UNE COURBE DE JORDAN RECTIFIABLE.

Soit Γ un arc continu fermé simple du plan complexe. Le théorème de Jordan affirme que le complémentaire de Γ est formé de deux composantes connexes dont l'une est bornée, c'est Ω_1 "l'intérieur" de Γ, Ω_2 étant "l'extérieur" de Γ. De plus Γ est la frontière commune à Ω_1 et Ω_2.

1) Généralités sur les transformations conformes.

a) Ω_1 est un ouvert simplement connexe et par conséquent il existe une transformation conforme Φ_1 du disque unité D sur Ω_1. Résumons les propriétés classiques de Φ_1 dans la

Proposition 1 : Φ_1 se prolonge en un homéomorphisme de D sur $\overline{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \Gamma$ et en particulier $\theta \to \Phi_1(e^{i\theta})$ est une paramétrisation de Γ.
Γ est rectifiable si et seulement si Φ_1' appartient à l'espace de Hardy H^1 du disque ($H^1(D)$) et si c'est le cas les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\theta \to \Phi_1(e^{i\theta})$ est absolument continue et l'on a :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\Phi_1(e^{i\theta})\right) = i\, e^{i\theta} \lim_{r \to 1} \Phi_1'(re^{i\theta}) \quad \text{p.p.}$$

- Φ_1 est conforme en presque tout point de C, le cercle unité.

Pour la démonstration de la proposition 1, on se reportera à [8], [15].

Dans toute la suite nous supposerons donnée une courbe de Jordan fermée, rectifiable, et, pour simplifier les raisonnements, nous supposerons que la longueur de Γ est 2π et que Ω_1, l'intérieur de Γ, contient 0.

b) Puisque $0 \in \Omega_1$, l'inversion $z \to \frac{1}{z}$ transforme Γ en Γ' qui est encore un arc de Jordan fermé rectifiable et envoie Ω_2 sur Ω_1', l'intérieur de Γ'.
Soit alors Ψ une transformation conforme de D sur Ω_1' telle que $\Psi(0) = 0$. L'application $\Phi_2(z) = 1/\Psi(\frac{1}{z})$ est alors une transformation conforme de $\mathcal{E}$, l'extérieur du cercle unité, sur Ω_2.

Des propriétés de Ψ découlant de la proposition 1 on déduit alors immédiatement les propriétés suivantes pour Φ_2 :

- Φ_2 se prolonge en un homéomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\bar{\Omega}_2 = \Omega_2 \cup \Gamma$.
- $z \to \Phi_2'(\frac{1}{z})$ appartient à $H^1(D)$.
- $\theta \to \Phi_2(e^{i\theta})$ est une paramétrisation absolument continue de Γ et l'on a

$$\frac{d}{d\theta}\left(\phi_2(e^{i\theta})\right) = ie^{i\theta} \lim_{r \to 1} \phi_2'(re^{i\theta}) \quad \text{p.p.}$$

2) L'intégrale de Cauchy.

a) Convergence non tangentielle.

Définition 1 : Soit $z_0 \in \Gamma$. On appelle pseudo-cône de sommet z_0 tout ensemble de la forme :

$$\Gamma_{z_0}^C = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tq. } |z - z_0| \leq C\, d(z_0, \Gamma) \right\}$$

où C désigne une constante > 1.

Soit $s \to z(s)$ une paramétrisation normale de Γ. Alors $z(s)$ est presque partout dérivable et $|z'(s)| = 1$ presque partout. En tout point $z_0 = z(s_0)$ où z est dérivable, les pseudo-cônes centrés en z_0 ont l'aspect, au moins dans un voisinage de z_0 de véritables cônes centrés en z_0 et axés suivant la normale en z_0 à Γ.

Définition 2 : Soit $F : \Omega_i \to \mathbb{C}$ une fonction ($i = 1$ ou 2), et $z_0 \in \Gamma$. On dit que F converge non tangentiellement vers ℓ en z_0 si l'on a, pour tout $C > 1$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega_i \cap \Gamma_{z_0}^C}} F(z) = \ell$$

Ces définitions étant posées, rappelons le théorème suivant, qui est classique. (Voir par exemple [15]).

Théorème d'unicité de Privalov : Soit f une fonction analytique dans Ω_1 telle que f admet une limite non tangentielle nulle en tout point d'un sous-ensemble de Γ de longueur > 0. Alors f est identiquement nulle sur Ω_1.

Par inversion, le résultat subsiste pour Ω_2 si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que la fonction s'annule à l'infini.

b) L'intégrale de Cauchy.

Soit f une fonction intégrable sur Γ. Alors l'intégrale de Cauchy

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}$$

définit deux fonctions holomorphes $F_1(\zeta)$ et $F_2(\zeta)$ respectivement sur Ω_1 et Ω_2 et l'on a la proposition suivante qui est une conséquence du théorème de Calderón sur l'intégrale de Cauchy (voir [4]).

Proposition 2 : En presque tout point de Γ les fonctions $F_1(\zeta)$ et $F_2(\zeta)$ admettent des limites non tangentielles que nous noterons respectivement $C_1 f$ et $C_2 f$.

Les opérateurs C_1 et C_2 sont liés à un opérateur d'intégrale singulières que nous allons maintenant décrire.

Soit f une fonction intégrable sur Γ. Soit $s \to z(s)$ une paramétrisation normale de Γ (considérée comme une fonction 2π-périodique) et $z_o = z(s_o)$ un point de Γ. On considère alors, pour $\varepsilon > 0$,

$$T_\varepsilon f(z_o) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\varepsilon \le |s-s_o| \le \pi}\frac{f(z(s))\,z'(s)\,ds}{z(s)-z(s_o)}$$

Proposition 3 : En presque tout point de Γ, $T_\varepsilon f(z)$ admet une limite lorsque ε tend vers 0, que nous noterons $Tf(z)$. De plus on peut écrire, presque partout sur Γ

$$C_1 f(z) = \frac{1}{2} f(z) + Tf(z)$$

$$C_2 f(z) = \frac{1}{2} f(z) - Tf(z)$$

Cette proposition est une conséquence de la proposition 2 et d'un résultat de Privalov sur l'intégrale de Cauchy (par exemple [15] p. 431).

Remarque : Pour $f \in L^1(\Gamma)$ et pour $z_0 \in \Gamma$ posons

$$I_\varepsilon(f)(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{z \in \Gamma \\ |z-z_0| \geq \varepsilon}} \frac{f(z)dz}{z-z_0}$$

Il est facile de constater que si f est continue et si z est un point de Γ tel que Γ admette une tangente en z_0 et tel que Tf(z) existe, alors :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(f)(z) = Tf(z)$$

Comme $|I_\varepsilon(f)(z) - T_\varepsilon f(z)| \leq C\, f^*(z)$, où f^* désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood de f, un argument classique permet de voir que les deux considérations d'intégrale singulière sont équivalentes en presque tout point de Γ.

3) Les espaces de Hardy associés à Γ.

a) Les espaces $H^p(\Omega_1)$.

Nous allons adopter le point de vue de Düren ([8]) et poser :

Définition 3 : Pour $p > 0$ on appelle $H^p(\Omega_1)$ l'espace des fonctions F holomorphes dans Ω_1 pour lesquelle il existe une famille Γ_n de courbes de Jordan ($\Gamma_n \subset \Omega_1$) "convergeant" vers Γ au sens que $\lim_{n\to\infty} d(\Gamma, \Gamma_n) = 0$ et telle que :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma_n} |F(z)|^p \, |dz| < +\infty$$

Soit Φ_1 une transformation conforme de D sur Ω_1. Puisque Φ_1' ne s'annule pas sur D, on peut considérer une représentation holomorphe de la racine p-ième de Φ_1', soit $(\Phi_1')^{1/p}$, et la proposition suivante est alors vraie (voir [8], [15]).

Proposition 4 : Soit F une fonction définie sur Ω_1. Alors $F \in H^p(\Omega_1)$ si et seulement si $F \circ \Phi_1 (\Phi_1')^{1/p} \in H^p(D)$, l'espace de Hardy usuel du disque.

D'après les propriétés de convergence non tangentielle pour $H^p(D)$ et les propriétés de Φ_1 décrites dans la proposition 1, on voit que toute fonction F appartenant à $H^p(\Omega_1)$ admet une limite non tangentielle en presque tout point de Γ et que cette limite appartient à $L^p(\Gamma)$. De plus, par le théorème d'unicité de Privalov, cette fonction de $L^p(\Gamma)$ détermine entièrement F.

On peut donc considérer $H^p(\Omega_1)$ comme un sous-espace de $L^p(\Gamma)$ et la proposition 4 nous apprend alors que $H^p(\Omega_1)$ est fermé dans $L^p(\Gamma)$.

Décrivons deux autres manières d'étendre à Ω_1 la notion d'espace de Hardy.

- Pour $0 < p < \infty$, appelons $\pi^p(\Omega_1)$ l'adhérence dans $L^p(\Gamma)$ de l'espace des polynômes en z.
- Pour $1 \leq p < \infty$, appelons $\mathcal{H}^p(\Omega_1)$ l'espace des fonctions $f \in L^p(\Gamma)$ telles que :

$$\forall \zeta \in \Omega_2 \quad \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = 0$$

Alors, de façon évidente $\pi^p(\Omega_1) \subset H^p(\Omega_1)$ pour $0 < p < \infty$ et l'on a la proposition suivante, due à Smirnov ([8]) :

Proposition 5 : $H^1(\Omega_1) = \mathcal{H}^1(\Omega_1)$ et, $\forall\, p \geq 1$, $H^p(\Omega_1) \subset \mathcal{H}^p(\Omega_1)$.

Bien que cette proposition soit classique, donnons-en une démonstration.
Remarquons tout d'abord que, grâce à un développement en série au voisinage de l'infini, on constate que la condition

$$\forall \zeta \in \Omega_2 \quad \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = 0$$

est équivalente à :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_\Gamma f(z)\, z^n\, dz = 0$$

Soit alors $f \in H^1(\Omega_1)$. Alors $f \in L^1(\Gamma)$, et l'on a, pour $n > 0$,

$$\int_{\Gamma} f(z)\, z^n dz = \int_{\partial D} f(\phi_1(u))\, \phi_1'(u)\, (\phi_1(u))^n du$$

Cette écriture est possible car $\theta \to \Phi_1(e^{i\theta})$ est une paramétrisation absolument continue de Γ. Mais cette dernière intégrale est nulle car, pour $n \geq 0$, Φ_1 étant bornée sur D, $f \circ \Phi_1 \Phi_1' (\Phi_1)^n \in H^1(D)$, et donc $H^1(\Omega_1) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_1)$.

- Réciproquement, soit $f \in \mathcal{H}^1(\Omega_1)$. Alors, pour $n \geq 0$,

$$\int_{\partial D} f(\phi_1(u))\, \phi_1'(u)\, u^n du = \int_{\Gamma} f(z) \left(\phi_1^{-1}(z)\right)^n dz$$

Mais $z \to (\Phi_1^{-1}(z))^n$ est holomorphe dans Ω_1 et continue sur Ω_1, et par conséquent, d'après le théorème de Mergelyan, on peut l'approcher uniformément sur Ω_1 par une suite de polynômes. Comme par hypothèse $\int_{\Gamma} f(z)\, z^n\, dz = 0$ pour $n \geq 0$, on en déduit que la deuxième intégrale est nulle. Si l'on pose

$$F(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z-\zeta} \qquad \text{pour} \quad \zeta \in \Omega_1$$

on voit, d'après la propriété de f et les propositions 2 et 3, que F converge tangentiellement vers f presque partout sur Γ, et ce que l'on vient de montrer prouve que $F \circ \Phi_1\, \Phi_1' \in H^1(D)$, d'après le théorème de F. et M. Riesz.

Tout ceci prouve que $f \in H^1(\Omega_1)$.

Enfin, que H^p soit inclus dans $\mathcal{H}^p$ pour $p \geq 1$ provient du fait que $H^p \subset H^1$ pour $p \geq 1$.

b) Les espaces $H^p(\Omega_2)$.

Rappelons que nous avons désigné par $\mathcal{E}$ "l'extérieur" du cercle unité. Par définition, pour $p > 0$, $H^p(\mathcal{E})$ désigne l'espace des fonctions F holomorphes dans $\mathcal{E}$, nulles à l'infini et telles que $z \to F(\frac{1}{z})$ appartienne à $H^p(D)$.

Alors, en appelant toujours par Ω' le transformé de Ω_2 par l'inversion $z \to \frac{1}{z}$, on définit, pour $p > 0$, l'espace $H^p(\Omega_2)$ comme étant l'espace des fonctions F holomorphes dans Ω_2, nulle à l'infini et telles que $z \to F(\frac{1}{z})$ appartienne à $H^p(\Omega')$.

Soit toujours Ψ une transformation conforme de D sur Ω' telle que $\Psi(0) = 0$. Alors, comme on l'a déjà vu au 1), $\Phi_2(z) = 1/\Psi(\frac{1}{z})$ est une transformation conforme de $\mathcal{E}$ sur Ω_2 et l'on a :

$$\phi_2'(z) = \frac{\psi'(\frac{1}{z})}{z^2\left[\psi(\frac{1}{z})\right]^2}$$

et $z \to \Phi_2'(\frac{1}{z})$ est une fonction holomorphe dans D ne s'annulant pas. Cette fonction admet donc une racine p-ième, holomorphe dans D, et il en est alors de même pour Φ_2' sur Ω_2.

On peut maintenant démontrer l'analogue du a) pour Ω_2.

Proposition 6 : Pour tout $p \in]0,\infty[$ et pour toute fonction F définie sur Ω_2

$$F \in H^p(\Omega_2) \iff F \circ \phi_2 (\phi_2')^{1/p} \in H^p(\mathcal{E})$$

La démonstration est facile. Compte-tenu du fait que F tend vers 0 à l'infini et des résultats du a), on a la suite d'équivalences

$$F(z) \in H^p(\Omega_2) \iff F(\tfrac{1}{u}) \in H^p(\Omega')$$

$$\iff F(\tfrac{1}{\psi(v)})(\psi'(v))^{1/p} \in H^p(D)$$

$$\iff F(\phi_2(z))(\phi_2'(z))^{1/p}\left[z\,\psi(\tfrac{1}{z})\right]^{2/p} \in H^p(\mathcal{E})$$

Mais il est très facile de voir qu'il existe deux réels a, b vérifiant

$$\forall z \in \mathcal{E} \quad 0 < a \leq \left|z\,\psi(\tfrac{1}{z})\right| \leq b$$

et la proposition 6 s'en déduit.

Là encore, toute fonction de $H^p(\Omega_2)$ admet en presque tout point de Γ une limite non-tangentielle et cette limite appartient à $L^p(\Gamma)$ et détermine entièrement la fonction. Grâce à la proposition 6, on peut donc voir $H^p(\Omega_2)$ comme un sous-espace fermé de $L^p(\Gamma)$.

On appelle alors $\pi^p(\Omega_2)$ l'adhérence dans $L^p(\Gamma)$ de l'ensemble des polynômes en $\frac{1}{z}$, nuls à l'infini, et $\mathcal{H}^p(\Omega_2)$ l'ensemble des fonc-

tions $f \in L^p(\Gamma)$ vérifiant

$$\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = 0 \qquad \text{pour } \zeta \in \Omega_1$$

Là encore, on a $\pi^p(\Omega_2) \subset H^p(\Omega_2)$ pour $0 < p < \infty$, et l'analogue du théorème de Smirnov est encore vrai :

Proposition 7 : $H^1(\Omega_2) = \mathcal{H}^1(\Omega_2)$ et $H^p(\Omega_2) \subset \mathcal{H}^p(\Omega_2)$, pour tout p tel que $1 \leq p < \infty$.

Nous allons calquer la démonstration de cette proposition sur celle de la proposition 5. On remarque tout d'abord que la condition

$$\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = 0 \qquad \text{pour } \zeta \in \Omega_1$$

est équivalente à la condition $\int_\Gamma f(z)\,\frac{dz}{z^n} = 0$ pour $n \geq 1$ en faisant un développement en 0.

- Supposons alors que $f \in H^1(\Omega_2)$. Pour $n \geq 1$,

$$\int_\Gamma f(z)\,\frac{dz}{z^n} = \int_{\partial D} f(\phi_2(u))\,\phi_2'(u)\,(\phi_2(u))^{-n}\,du$$
$$= \int_{\partial D} G\left(\frac{1}{u}\right)\left[\psi\left(\frac{1}{u}\right)\right]^n du$$

où $G \in H^1(D)$ avec $G(0) = 0$. Mais cette intégrale vaut

$$-\int_{\partial D} \frac{G(u)(\psi(u))^n}{u^2}\,du = 0$$

car $\frac{G(u)(\psi(u))^n}{u^2} \in H^1(D)$, et donc $f \in \mathcal{H}^1(\Omega_2)$.

- Supposons à présent que $f \in \mathcal{H}^1(\Omega_2)$. Pour $n \geq 1$

$$\int_{\partial D} f(\phi_2(u))\,\phi_2'(u)\,u^{-n}\,du = \int_\Gamma f(z)\,(\phi_2^{-1}(z))^{-n}\,dz$$

Mais $z \to [\Phi_2^{-1}(z)]^{-n}$ est une fonction holomorphe sur Ω_2 continue sur Ω_2. D'après le théorème de Mergelyan, on peut donc l'approcher uniformément sur Ω_2 par une suite de polynômes en $\frac{1}{z}$, nuls à l'infini et on en déduit que l'intégrale considérée est nulle puisque $f \in \mathcal{H}^1(\Omega_2)$. Le reste de la démonstration est alors absolument identique au cas Ω_1.

Remarque : Si Ω_1 est un domaine de Smirnov, c'est-à-dire si Φ_1' est extérieure, alors ([8])

$$\forall p > 0 \quad \pi^p(\Omega_1) = H^p(\Omega_1)$$

$$\forall p \geq 1 \quad H^p(\Omega_1) = \mathcal{H}^p(\Omega_1)$$

De même, si Ψ' est extérieure, on a les mêmes égalités pour Ω_2. Les domaines de Smirnov apparaissent donc comme les domaines de Jordan les plus généraux pour lesquels on ait une théorie cohérente des espaces de Hardy.
Notons encore qu'il est naturel de penser que si Ω_1 est un domaine de Smirnov, alors il en est de même pour Ω', mais nous ne savons pas le démontrer.

4) Lien avec le théorème de Calderón.

Soit Γ un arc de Jordan fermé simple recitifiable. On dira que Γ est une courbe de Calderon si l'opérateur T défini au 2) est continu sur $L^2(\Gamma)$.

Montrons alors le théorème suivant qui va conclure ce chapitre.

Théorème 1 : Γ est une courbe de Calderón si et seulement si $L^2(\Gamma)$ est somme directe topologique de $H^2(\Omega_1)$ et de $H^2(\Omega_2)$ et les projections associées à cette somme directe sont alors $C_1 = T + \frac{1}{2}I$ et $C_2 = -T + \frac{1}{2}I$.

Démonstration : Nous allons commencer par montrer que l'espace des fractions rationnelles dont les pôles n'appartiennent pas à Γ est dense dans $L^2(\Gamma)$.
Comme Γ est compact, ce résultat découlera immédiatement du théorème de Hartogs-Rosenthal ([14]) une fois que nous aurons montré que Γ est de mesure planaire nulle.

Lemme : Soit Γ un arc rectifiable du plan. Alors Γ est de mesure planaire nulle.

Considérons en effet $s \to z(s)$, $[0,L] \to \mathbb{C}$ une paramétrisation normale de Γ. Alors la fonction z est 1-lipschitzienne.
On considère alors la subdivision $0 < a_1 < \ldots < a_n < L$ de $[0,L]$ en n intervalles égaux. Alors

$$\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_i, \frac{L}{n}\right) \qquad \text{et donc}$$

$$|\Gamma| \leq n \frac{\pi L^2}{n^2} = \frac{\pi L^2}{n}$$

où $|\Gamma|$ représente la mesure planaire de Γ. Le lemme en découle en faisant tendre n vers l'infini.

Ceci étant montré, supposons que Γ est une courbe de Calderon. Soit R une fraction rationnelle dont les pôles n'appartiennent pas à Γ. En utilisant la décomposition en éléments simples de R, on voit que R s'écrit de façon unique comme somme d'une fraction rationnelle R_1 dont les pôles appartiennent à Ω_2 et d'une fonction rationnelle R_2, nulle à l'infini, dont les pôles appartiennent à Ω_1.

De plus, par la formule de Cauchy classique, on a :

$$R_1 = C_1 R = \left(T + \frac{1}{2} I\right) R$$

et

$$R_2 = C_2 R = \left(-T + \frac{1}{2} I\right) R$$

De ceci on tire alors que, si Γ est une courbe de Calderón,

$$\pi^2(\Omega_i) = H^2(\Omega_i) = \mathcal{H}^2(\Omega_i) \quad (i = 1,2)$$

Soit en effet $f \in \mathcal{H}^2(\Omega_i)$ et f_n une suite de fractions rationnelles dont les pôles $\notin \Gamma$ convergeant vers f dans L^2. Alors :

$$f = C_i f = \lim_{n \to \infty} C_i f_n \quad \Rightarrow \quad f \in \pi^2(\Omega_i)$$

D'autre part, il est clair que

$$\forall f \in L^2(\Gamma) \quad \left(T^2 - \frac{1}{4} I\right) f = C_1 C_2 f = 0$$

puisque c'est trivialement vrai pour les fractions rationnelles.
On en déduit que

$$L^2(\Gamma) = H^2(\Omega_1) + H^2(\Omega_2)$$

+ signifiant somme directe topologique.

Réciproquement, si $L^2(\Gamma)$ est somme directe topologique de $H^2(\Omega_1)$ et $H^2(\Omega_2)$ les projections associées sont nécessairement C_1 et C_2, et donc T est borné sur $L^2(\Gamma)$.

Le théorème 1 est démontré.

Corollaire : Si Γ est une courbe de Calderón, Φ_1' et Φ_2' sont extérieures, et l'on a

$$\forall p \quad 0<p<\infty \qquad \pi^p(\Omega_i) = H^p(\Omega_i)$$

$$\forall p \geq 1 \qquad H^p(\Omega_i) = \mathcal{H}^p(\Omega_i)$$

En effet, on a vu que si Γ est une courbe de Calderon $\pi^2(\Omega_1) = \mathcal{H}^2(\Omega_1)$. Ceci prouve (voir [9]) que Ω_1 est un domaine de Smirnov, ce qui est équivalent avec le fait que Φ_1' soit extérieure.

Les propriétés pour p quelconque en découlent (voir [9]).

Le raisonnement pour Ω_2 est analogue en considérant la transformation conforme Ψ déjà introduite.

Remarque : On sait construire (voir [8]) des courbes de Jordan rectifiables telles que le domaine Ω_1 qu'elles entourent ne soit pas un domaine de Smirnov.
Ces courbes nous fournissent donc des exemples de courbes de Jordan rectifiables qui ne sont pas des courbes de Calderón.

***

II - COURBES DE JORDAN VERIFIANT UNE CONDITION CORDE-ARC.

1) La condition corde-arc et la transformation conforme.

Définition : Soit Γ un arc de Jordan fermé rectifiable. Pour M_1, M_2 appartenant à Γ, on note $\widehat{M_1M_2}$ la longueur du plus petit des deux sous-arcs de Γ joignant M_1 à M_2, et M_1M_2 la longueur du segment $[M_1M_2]$. On dit que Γ vérifie la condition corde-arc s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall\, M_1, M_2 \in \Gamma \qquad M_1M_2 \geq C\, \widehat{M_1M_2}$$

Exemples Toute courbe de classe C^1 sans point stationnaire vérifie la condition corde-arc. Toute courbe présentant un rebroussement de première espèce ne vérifie pas la condition corde-arc.

Keldysch et Lavrent'ev ont été les premiers à étudier ces courbes. Dans [18], ils montrent que si Γ vérifie la condition corde-arc, alors, avec les notations du I, Ω_1 est un domaine de Smirnov, c'est-à-dire que Φ_1' est extérieure.

Pommerenke améliore considérablement ce résultat dans [22]. Il montre que si Γ vérifie la condition corde-arc, alors Log Φ_1' appartient à BMOA(D) (c'est-à-dire BMO analytique du disque, soit $H^1(D) \cap BMO(\mathbb{T})$).

En fait, nous allons voir que la méthode employée par Pommerenke permet d'avoir sans difficulté un résultat encore plus précis, à savoir que $|\Phi_1'(z)| \in A^p(\partial D)$, pour p assez grand. Rappelons la définition des classes A^p de Muckenhoupt :

Définition : Soit p un réel tel que $1 < p < \infty$ et ω une fonction positive intégrable sur ∂D. On dit que $\omega \in A^p(\partial D)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout intervalle I de ∂D on ait

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega(z)\,|dz|\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega(z)^{-1/p-1}\,|dz|\right)^{p-1} \leq C$$

Voir [5] pour des détails sur ces classes. On démontre facilement que $A^{p_1} \subset A^{p_2}$ si $p_1 \leq p_2$.

Théorème 2 : Soit Γ un arc de Jordan vérifiant la condition corde-arc et Φ_1, Φ_2 les transformations conformes de D sur Ω_1 et de $\mathcal{C}$ sur Ω_2 respectivement. Alors $z \to |\Phi_i'(z)|$ $(i = 1,2)$ appartient à $A^p(\partial D)$ pour p assez grand.

Pour démontrer le théorème 2, nous allons énoncer deux lemmes démontrés par Pommerenke dans [22]. Le premier, basé sur des considérations géométriques, donne l'estimation fondamentale. Le second est en quelque sorte une version "variable complexe" de l'inégalité de John et Nirenberg [16].

Lemme 1 : Pour $\mathcal{S} \in D$, posons $I(\mathcal{S}) = \{z \in \partial D \mid |\arg z - \arg \mathcal{S}| \leq \pi(1 - |\mathcal{S}|)\}$. Alors, si Γ vérifie la condition corde-arc, il existe $\alpha < 0$ tel que, pour $\mathcal{S} \in D$, on ait :

$$(1) \qquad \int_{I(\mathcal{S})} |\phi_1'(z)|\,|dz| \leq \alpha\,(1-|\mathcal{S}|)\,|\phi_1'(\mathcal{S})|$$

Lemme 2 : Soit f une fonction holomorphe dans D. Sont alors équivalents

(i) $f \in BMOA(D)$

(ii) f est une fonction de Bloch (i.e. $\sup_{\mathcal{S} \in D} (1 - |\mathcal{S}|)|f'(\mathcal{S})| < \infty$),

exp(f) est extérieure et il existe a, $M > 0$ telles que

$$(2) \qquad \forall \mathcal{S} \in D \quad \int_{I(\mathcal{S})} |\exp(a f(z))|\,|dz| \leq M\,(1-|\mathcal{S}|)\,|\exp a f(\mathcal{S})|$$

Démontrons alors le théorème 2. Φ_1 est conforme, et donc, par le théorème de distorsion de Koebe ([21]), Log Φ_1' est une fonction de Bloch. Si Γ vérifie la condition corde-arc, alors on sait de plus que Φ_1' est extérieure (Keldysch-Lavrent'ev), et le lemme 1 nous donne l'inégalité (2) avec $a = 1$ et $M = \alpha$. Donc Log $\Phi_1' \in BMOA(D)$ d'après le lemme 2.

Alors nécessairement Log $\frac{1}{\Phi_1'} \in BMOA(D)$, et une deuxième application du lemme 2 nous montre qu'il existe a, $M > 0$ telles que

$$\forall \mathcal{S} \in D \quad \int_{I(\mathcal{S})} \frac{1}{|\phi_1'(z)|^a}\,|dz| \leq \frac{M(1-|\mathcal{S}|)}{|\phi_1'(\mathcal{S})|^a}$$

ou encore

$$\left(\frac{1}{1-|\zeta|} \int_{I(\zeta)} \frac{1}{|\phi_1'(z)|^a} |dz| \right)^{1/a} \leq \frac{C}{|\phi_1'(\zeta)|}$$

d'autre part, par le lemme 1 :

$$\left(\frac{1}{1-|\zeta|} \int_{I(\zeta)} |\phi_1'(z)| \, |dz| \right) \leq C \, |\phi_1'(\zeta)|$$

On multiplie membre à membre ces deux dernières inégalités et cela donne la condition A^p pour $|\phi_1'|$ avec $p = 1 + \frac{1}{a}$.
Pour ϕ_2 on remarque tout d'abord que si Γ vérifie la condition corde-arc, il en est de même pour Γ', transformée de Γ par l'inversion $z \to \frac{1}{z}$ (voir Appendice 1). Donc, avec les notations du I, $z \to |\Psi'(z)| \in A^p(\partial D)$, pour p assez grand. Mais

$$|\phi_2'(z)| = \frac{|\psi'(\frac{1}{z})|}{|z \, \psi(\frac{1}{z})|^2}$$

et il existe a, b > 0 tels que $\forall\, z \in \partial D$, $0 < a \leq |z \, \Psi(\frac{1}{z})|^2 \leq b$ et l'appartenance à $A^p(\partial D)$ de $|\phi_2'(z)|$ s'en déduit.

Signalons deux corollaires du théorème 2. Le corollaire 1 est un résultat de Warschawski et sera utile dans la suite ([25]). Le corollaire 2, que nous démontrerons dans l'appendice 2, donne une technique d'approximation des courbes vérifiant corde-arc par des courbes C^∞ .

Corollaire 1 : Si Γ vérifie la condition corde-arc, il existe $p > 1$ tel que $\phi_1' \in H^p(D)$ et $\phi_2' \in H^p(\mathcal{C})$.

Cette proposition résulte immédiatement de la propriété des classes A^p de satisfaire une inégalité de Hölder "inversée" (voir [5]).

Corollaire 2 : Si Γ vérifie la condition corde-arc, les courbes Γ_r, transformées par ϕ_1 des cercles de centre 0 et de rayon r, vérifient uniformément la condition corde-arc pour $0 < r \leq 1$.

2) Caractérisation de $H^p(\Omega_1)$ $(0 < p < \infty)$ à l'aide d'une fonction maximale.

Comme Γ vérifie la condition corde-arc, Ω_1 est un domaine de Smirnov et par conséquent :

$$\forall p \in]0,\infty[\quad \pi^p(\Omega_1) = H^p(\Omega_1)$$

et $\forall p \geq 1 \quad H^p(\Omega_1) = \mathcal{H}^p(\Omega_1)$

Comme de plus $|\Phi_1'| \in A^p(\partial D)$, pour p assez grand, nous pouvons utiliser certains résultats de C. Kenig ([19]) sur les espaces de Hardy "à poids" •, c'est-à-dire :

$$\forall p>0 \quad F \in H^p(\Omega_1) \iff F \circ \phi_1 \, (\phi_1')^{1/p} \in H^p(D)$$
$$\iff F \circ \phi_1 \in H^p(D, |\phi_1'|)$$

Et C. Kenig a montré les caractérisations de $H^p(D, |\Phi_1'|)$ suivantes

$$F \in H^p(D, |\phi_1'|) \iff \sup_{0<r<1} |F(rz)| \in L^p(\partial D, |\phi_1'|)$$
$$\iff \sup_{\zeta \in \Gamma_z^C} |F(\zeta)| \in L^p(\partial D, |\phi_1'|)$$

Dans cet énoncé, f désigne naturellement une fonction holomorphe dans D, C désigne une constante > 1, et

$$\forall z \in \partial D \quad \Gamma_z^C = \{ \zeta \in D \; ; \; |\zeta - z| \leq C(1-|\zeta|) \}$$

Nous nous proposons d'établir une caractérisation analogue de $H^p(\Omega_1)$ n'utilisant plus la transformation conforme.
Rappelons tout d'abord la définition d'un pseudo-cône associé à Γ.
Soit $C > 1$, et $z_0 \in \Gamma$; $\Gamma_{z_0}^C = \{z \in \Omega_1 \; | z - z_0 | \leq C \, d(z,\Gamma)\}$. Posons encore, pour toute fonction f définie sur Ω_1 et toute $C > 1$

$$\forall z_0 \in \Gamma \quad f_C^*(z_0) = \sup_{z \in \Gamma_{z_0}^C} |f(z)|$$

La caractérisation cherchée est alors donnée par le

• Voir appendice 3.

Théorème 3 : Il existe $C > 1$ telle que, pour toute fonction F holomorphe dans Ω_1 et tout $p > 0$,

$$F \in H^p(\Omega_1) \Leftrightarrow F_C^* \in L^p(\Gamma)$$

avec équivalence des "normes" correspondantes.

Le théorème 3 va se déduire des résultats de C. Kenig et de deux lemmes de nature géométrique.

Lemme 1 : Il existe une constante $C > 1$ telle que, pour tout $z \in \partial D$, l'image par Φ_1 du rayon $(0,z)$ soit incluse dans le pseudo-cône $\Gamma^C_{\Phi_1(z)}$.

Pour démontrer le lemme 1, nous allons utiliser un résultat de Pommerenke ([21]) sur les fonctions univalentes :

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction Φ univalente dans D et pour tout $\zeta \in D$, il existe $z \in I(\zeta)$ tel que

$$|\phi(\zeta) - \phi(z)| \leq C\, d\left(\phi(\zeta), \partial\phi(D)\right)$$

Passons à la démonstration du lemme 1. Pour tout $r \in (0,1)$, il existe donc $z_r \in I(rz)$ tel que

$$|\phi(rz) - \phi(z_r)| \leq C\, d\left(\phi(rz), \Gamma\right)$$

on peut alors écrire

$$\begin{aligned} |\phi(rz) - \phi(z)| &\leq |\phi(rz) - \phi(z_r)| + |\phi(z_r) - \phi(z)| \\ &\leq C\, d\left(\phi(rz), \Gamma\right) + \int_{I(rz)} |\phi'(u)|\, |du| \end{aligned}$$

On utilise alors le lemme 1 du théorème 2 :

$$\int_{I(rz)} |\phi'(u)|\, |du| \leq \alpha (1-r)\, |\phi'(rz)|$$

et d'après le théorème de distorsion de Koebe

$$(1-r)\, |\phi'(rz)| \leq 4\, d\left(\phi(rz), \Gamma\right)$$

On a donc montré

$$\forall z \in \partial D \quad \forall r \in]0,1[\quad |\phi(rz) - \phi(z)| \leq (C + 4\alpha)\, d(\phi(rz), \Gamma)$$

ce qui prouve le lemme 1.

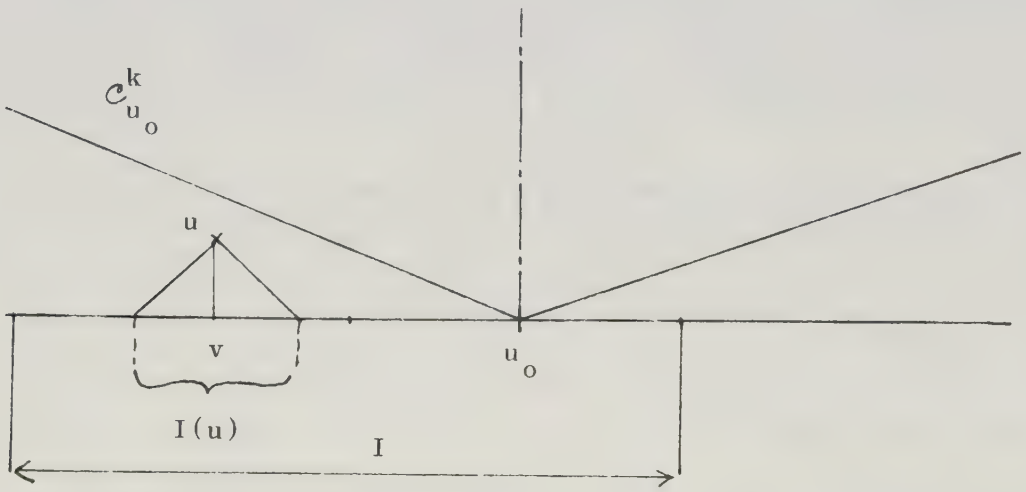
Lemme 2 : Pour toute constante $C > 1$, il existe une constante $C' > 1$ telle que

$$\forall z_0 \in \partial D \quad \phi_1^{-1}\left(\Gamma^C_{\phi_1(z_0)}\right) \subset \mathcal{C}^{C'}_{z_0}$$

Soit $u_0 \in \partial D$. Il suffit de montrer que pour K assez grand on a, pour $u \in D$,

$$|u - u_0| \geq K(1 - |u|) \Rightarrow |\phi(u) - \phi(u_0)| \geq 2C\, d(\phi(u), \Gamma)$$

Soit donc u tel que $|u - u_0| \geq K(1 - |u|)$. Posons $v = \frac{u}{|u|}$. Alors $|u_0 - v| \geq (K-1)(1 - |u|)$.



$$d(\phi(u), \Gamma) \leq \frac{|\phi(u) - \phi(v)|}{|\phi(u) - \phi(u_0)|}\, |\phi(u) - \phi(u_0)|$$

et donc

$$|\phi(u) - \phi(u_0)| \geq \left| \frac{|\phi(u_0) - \phi(v)|}{|\phi(u) - \phi(v)|} - 1 \right| d(\phi(u), \Gamma)$$

D'une part, d'après la condition corde-arc

$$|\phi(u_0) - \phi(v)| \geq C \int_{u_0}^{v} |\phi'(z)|\, |dz|$$

D'autre part, d'après le lemme 1 ci-dessus :

$$|\phi(u)-\phi(v)| \leq C\,(1-|u|)\,|\phi'(u)|$$

En utilisant alors la condition A^p et l'inégalité de Hölder,

$$|\phi'(u)| \leq \frac{C}{\left(m_{I(u)}\,|\phi'|^{-1/p-1}\right)^{p-1}} \leq \frac{C}{1-|u|}\int_{I(u)}|\phi'(z)|\,|dz|$$

Finalement, il vient

$$\frac{|\phi(u_0)-\phi(v)|}{|\phi(u)-\phi(v)|} \geq C\,\frac{\int_{u_0}^{v}|\phi'(z)|\,|dz|}{\int_{I(u)}|\phi'(z)|\,|dz|}$$

$|\phi'|$ est en particulier une mesure de type homogène et par conséquent

$$\int_{u_0}^{v}|\phi'(u)|\,|du| \geq C\int_{I}|\phi'(z)|\,|dz|$$

où I désigne l'intervalle de même centre que (u_0,v) et de longueur double. Pour K assez grand, il est clair que $I(u)\subset I$. On utilise alors une propriété classique des classes A^p ([ ]) qui donne

$$\exists\, C>0 \quad \exists\,\delta>0 \quad \forall u\in D \quad \frac{\int_I|\phi'(z)|\,|dz|}{\int_{I(u)}|\phi'(z)|\,|dz|} \geq C\left(\frac{|I|}{|I(u)|}\right)^{\delta} \geq C(K-1)^{\delta}$$

et l'on obtient bien la condition désirée pour K assez grand.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la théorème 3. Considérons la constante C du lemme 1. Soit F une fonction holomorphe dans Ω_1 et $G = F\circ\Phi_1$.

Supposons tout d'abord que $F_C^*\in L^p(\Gamma)$. Alors,

$$\forall z\in\partial D \quad G^*_{rad.}(z) = \sup_{0<r<1}|F(\phi_1(rz))| \leq F_C^*(\phi_1(z))$$

d'après le lemme 1 et $F_C^*\circ\Phi_1\in L^p(\partial D,|\Phi_1'|)$ par hypothèse. Donc $G\in H^p(D,|\Phi_1'|)$, ce qui équivaut à $F\in H^p(\Omega_1)$, d'après les résultats de Carlos Kenig.

Supposons à présent $F\in H^p(\Omega_1)$. Alors,

$$\forall z\in\partial D \quad F_C^*(\phi_1(z)) = \sup_{\zeta\in\Gamma_{\phi_1(z)}^C}|F(\zeta)| \leq \sup_{u\in\mathcal{E}_z^{C'}}|G(u)| = G_{C'}^*(z)$$

d'après le lemme 2. Mais $G^*_{C'} \in L^p(\partial D, |\Phi'_1|)$ d'après C. Kenig. Il en est donc de même de $F^*_C \circ \Phi_1$, ce qui prouve $F^* \in L^p(\Gamma)$. Pour obtenir l'équivalence de "normes", il faut reprendre toutes les inégalités et utiliser les équivalences démontrées par C. Kenig.

3) L'opérateur T et la condition corde-arc.

Comme on l'a déjà remarqué, si Γ vérifie la condition corde-arc, il en est de même de Γ', transformé de Γ par l'inversion $z \to \frac{1}{z}$. Et donc, d'après le résultat de Keldysch-Lavrent'ev, Ω_1 et Ω' sont des domaines de Smirnov et l'on a, comme on l'a déjà remarqué au I :

$$\forall p > 0 \quad \pi^p(\Omega_i) = H^p(\Omega_i)$$
$$\forall p \geq 1 \quad H^p(\Omega_i) = \mathcal{H}^p(\Omega_i) \qquad (i = 1, 2)$$

Ce résultat montre que, pour $p \geq 1$, l'étude de $H^p(\Omega_i)$ se ramène à l'étude de l'opérateur T, qui est le thème de cette partie.

a) Les espaces $H^1(\Gamma)$ et $BMO(\Gamma)$.

Définition : Soit f une fonction définie sur Γ. On dit que $f \in H^1(\Gamma)$ (resp. $f \in BMO(\Gamma)$) si la fonction 2π-périodique $s \to f(z(s)) \in H^1(\mathbb{T})$, (l'espace H^1 de Fefferman-Stein) (resp. $f \in BMO(\mathbb{T})$).

Avant d'examiner le lien entre ces espaces et les espaces de Hardy de fonctions analytiques, posons encore la

Définition : Pour $i = 1,2$, appelons $BMOA(\Omega_i)$ l'espace de fonctions f holomorphes dans Ω_i et telles que

$$f \circ \phi_i \in BMOA(D) \text{ ou } BMOA(\mathbb{E})$$

Dans le I, nous avons vu le rapport (du type théorème de F. et M. Riesz) entre les espaces $L^p(\Gamma)$ et $H^p(\Omega_i)$ pour $p \geq 1$. Nous nous proposons maintenant de montrer des résultats analogues pour H^1 et BMO lorsque Γ vérifie la condition corde-arc.

Proposition 8 : Si Γ vérifie la condition corde-arc, alors

$$BMOA(\Omega_1) = \{ f \in BMO(\Gamma) \; ; \; C_2 f = 0 \}$$
$$BMOA(\Omega_2) = \{ f \in BMO(\Gamma) \; ; \; C_1 f = 0 \}$$

Démonstration : Γ admet 3 paramétrisations absolument continues remarquables qui sont $s \to z(s)$, la paramétrisation normale, et $\theta \to \Phi_i(e^{i\theta})$ pour $i = 1,2$.

Ces paramétrisations sont reliées par

$$\phi_i(e^{it}) = z(\theta_i(t)) \quad \text{où} \quad \theta_i'(t) = |\phi_i'(e^{it})| \in A^1(\partial D)$$

pour p assez grand (théorème 3). On a donc $z(s) = \Phi_j(e^{i h_j(s)})$, $j = 1,2$, avec $h_j = \theta_j^{-1}$. h_j est donc un homéomorphisme de $[0,2\pi]$ appartenant au groupe $\mathcal{G}$ introduit par Coifman et Meyer ([20]). Comme l'a montré P. Jones, le groupe $\mathcal{G}$ a ceci de remarquable que

$$h \in \mathcal{G} \iff V_h : f \mapsto f \circ h$$

est un isomorphisme de $BMO(\mathbb{T})$ [17].

Soit alors $f \in BMOA(\Omega_j)$. Alors

$$f(z(s)) = f(\phi_j(e^{i h_j(s)})) \in BMO(\mathbb{T})$$

puisque $h_j \in \mathcal{G}$, et donc $f \in BMO(\Gamma)$.

D'autre part, $f \circ \Phi_j \in BMOA(D \text{ ou } \mathcal{E})$ et par conséquent appartient à tous les H^p d'après l'inégalité de John et Nirenberg. Mais on sait également (corollaire 1 du théorème 3) qu'il existe $p > 1$ tel que $\Phi_j' \in H^p$. Comme $f \circ \Phi_j \in H^q$, où q est l'exposant conjugué de p, il vient, par l'inégalité de Hölder, que $f \circ \Phi_j(\Phi_j') \in H^1$.

En utilisant alors les résultats de la partie I, il vient alors $C_2 f = 0$ si $j = 1$, et $C_1 f = 0$ si $j = 2$.

Réciproquement, supposons que $f \in BMO(\Gamma)$ et $C_2 f = 0$ (par exemple). D'une part $f(\Phi_1(e^{it})) = f(z(\theta_1(t)) \in BMO(\mathbb{T})$ puisque $\theta_1 \in \mathcal{G}$. D'autre part, il existe $p > 0$ tel que $\frac{1}{\Phi_1'} \in H^p(D)$ d'après l'inégalité de John et Nirenberg. De plus, toujours d'après John et Nirenberg, f appartient à tous les $L^p(\Gamma)$ pour $p \geq 1$, et comme $C_2 f = 0$, f appartient en fait à tous les $H^p(\Omega_1)$ pour $p \geq 1$. On écrit alors

$$f \circ \phi_1 = f \circ \phi_1 \, (\phi_1')^{\frac{p}{p+1}} \left(\frac{1}{\phi_1'}\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

où p est tel que $\frac{1}{\Phi_1'} \in H^p(D)$. Alors

$$f \circ \phi_1 \, (\phi_1')^{\frac{p}{p+1}} \in H^{\frac{p+1}{p}}(D)$$

$$\left(\frac{1}{\phi_1'}\right)^{\frac{p}{p+1}} \in H^{p+1}(D)$$

Comme $\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p+1} = 1$, on en déduit, par l'inégalité de Hölder, que $f \circ \Phi_1 \in H^1(D)$ et la proposition 8 est démontrée.

Le résultat pour $H^1(\Gamma)$ est peut différent. Posons

$$\frac{1}{z'} H^1(\Gamma) = \left\{ f \in L^1(\Gamma) \; ; \; f(z(s))\, z'(s) \in H^1(\mathbb{T}) \right\}$$

où $z(s)$ désigne une paramétrisation normale de Γ. Alors

Proposition 9 : Si Γ vérifie la condition corde-arc,

$$H^1(\Omega_1) = \left\{ f \in \frac{1}{z'} H^1(\Gamma) \; ; \; C_2 f = 0 \right\}$$

$$H^1(\Omega_2) = \left\{ f \in \frac{1}{z'} H^1(\Gamma) \; ; \; C_1 f = 0 \right\}$$

La démonstration est très simple. D'après les résultats du I, et le fait que $H^1(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$, il suffit de montrer que $H^1(\Omega_1) \subset \frac{1}{z'} H^1(\Gamma)$ (idem pour Ω_2).

Soit donc $f \in H^1(\Omega_1)$. Alors

$$f(z(s))\, z'(s) = f\left(\phi_1(e^{i h_1(s)})\right) i e^{i h_1(s)} \phi_1'(e^{i h_1(s)}) \, h_1'(s)$$

$$= F(h_1(s))\, h_1'(s)$$

où $F(t) = i e^{it} f(\Phi_1(e^{it})) \Phi_1'(e^{it}) \in H^1(\mathbb{T})$, puisque $f \in H^1(\Omega_1)$.

On utilise alors la dualité H^1 - BMO. Puisque $f \to f \circ h_1$ est un isomorphisme de BMO, $f \to f \circ h_1 h_1'$, qui est l'opérateur adjoint, est un isomorphisme de H^1. La proposition 9 est démontrée.

b) Méthodes de variable réelle pour l'opérateur T.

Rappelons la définition de l'opérateur T

$$Tf(z_0) = \text{V.P.} \frac{1}{2i\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \frac{f(z(y))\, z'(y)\, dy}{z(y) - z(x_0)}$$

si $z_o = z(x_o)$. On sait que cet opérateur est bien défini p.p. pour $f \in L^1(\Gamma)$. Il en sera alors de même pour l'opérateur T_1 défini par

$$T_1 f(z(x)) = z'(x) \quad V.P. \frac{1}{2i\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \frac{f(z(y))\,dy}{z(y)-z(x)}$$

$$= z'(x) \; T\left(\frac{f}{z'}\right)(z(x))$$

Proposition 10 : Si Γ est une courbe de Calderón (i.e. si T est borné sur L^2) vérifiant la condition corde-arc, alors T_1 est borné sur $H^1(\Gamma)$, et T est borné sur BMO(Γ) et sur tous les $L^p(\Gamma)$ pour $p > 1$.

Pour démontrer la proposition 10, il suffit de montrer que T_1 est borné sur $H^1(\Gamma)$. En effet, ceci implique que T, qui est l'opérateur adjoint de T_1 est borné sur BMO(Γ). On en déduit alors que l'opérateur de noyau $\frac{1}{z(y) - z(x)}$ envoie $H^1(\Gamma)$ dans $L^1(\Gamma)$ et $L^\infty(\Gamma)$ dans BMO(Γ). Par le théorème d'interpolation de Rivière et Hanks, on en déduit alors qu'il est borné sur tous les L^p pour $p > 1$, et le même résultat s'en déduit immédiatement pour l'opérateur T.

Pour démontrer que l'opérateur T_1 est borné sur $H^1(\Gamma)$, nous allons utiliser les résultats de Coifman et Weiss ([6]) et montrer que T_1 transforme les "atomes" en "molécules" (à une constante multiplicative près).

Rappelons les définitions d'atomes et de molécules sur $\mathbb{T}$. On appelle atome centré en 0 toute fonction a de support inclus dans un intervalle $I \subset]-\pi, \pi[$ de centre 0 et telle que

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(\theta)\,d\theta = 0$$

$$\|a\|_\infty \leq \frac{1}{|I|}$$

On appelle molécule centrée en 0 toute fonction $M \in L^2(\mathbb{T})$ vérifiant

$$\int_{-\pi}^{\pi} M(\theta)\,d\theta = 0$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2\,d\theta\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2\,\theta^2\,d\theta\right) \leq 1$$

Soit alors a une fonction définie sur Γ telle que $s \to a(z(s))$ soit un atome centré en 0. Posons

$$\tilde{a} = T_1 a$$

Alors $\tilde{a} \in L^2$ et donc

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{a}(z(s))\,ds &= \int_{\Gamma} T\left(\frac{a}{z'}\right)(z)\,dz \\ &= \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2}\frac{a}{z'} + T\left(\frac{a}{z'}\right)\right] dz - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} a(z(s))\,ds \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque $\frac{1}{2}\frac{1}{z'} + T\left(\frac{a}{z'}\right) \in H^2(\Omega_1)$ et que $\int_{-\pi}^{\pi} a(z(s))ds = 0$. D'autre part :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{a}(z(x))|^2 x^2\,dx = \int_{|x| \le \frac{2}{\delta}|I|} + \int_{|x| > \frac{2}{\delta}|I|}$$

où δ est la constante de la condition corde-arc.

$$\begin{aligned}\int_{|x| \le \frac{2}{\delta}|I|} |\tilde{a}(z(x))|^2 x^2\,dx &\le \frac{4}{\delta^2}|I|^2 \|\tilde{a}\|_2^2 \\ &\le C\frac{4}{\delta^2}|I|^2 \|a\|_2^2 \le C|I|\end{aligned}$$

Pour estimer l'autre intégrale, on écrit, compte-tenu du fait que $\int a(z(s))ds = 0$, pour $|x| \ge \frac{2}{\delta}|I|$,

$$\begin{aligned}\tilde{a}(z(x)) &= \int_{-\pi}^{\pi} a(z(y))\,z'(x)\left(\frac{1}{z(y)-z(x)} - \frac{1}{z(0)-z(x)}\right) dy \\ &= \int_{I} \frac{a(z(y))\,z'(x)\,(z(0)-z(y))}{(z(0)-z(x))\,(z(y)-z(x))}\,dy\end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que Γ vérifie corde-arc avec une constante δ et donc :

$$|z(0) - z(x)| \geq \delta |x|$$
$$|z(y) - z(x)| \geq |z(x) - z(0)| - |z(y) - z(0)|$$
$$\geq \delta |x| - |I| \geq \frac{\delta}{2} |x|$$

si $y \in I$ et $|x| \geq \frac{2}{\delta} |I|$.
Finalement

$$|x| > \frac{2}{\delta}|I| \Rightarrow |\widetilde{a}(z(x))| \leq \int_I \frac{\frac{1}{|I|} \cdot |I|}{\delta |x| \, \frac{\delta}{2} |x|} \, dy$$

où encore $|\tilde{a}(z(x))| \leq \frac{1}{\delta^2} \frac{|I|}{x^2}$, et par conséquent,

$$\int_{|x| \geq \frac{2}{\delta}|I|} |\tilde{a}(z(x))|^2 x^2 dx \leq C|I|^2 \int_{|x| \geq \frac{2}{\delta}|I|} \frac{dx}{x^2} \leq C|I|$$

Comme T est borné sur L^2, on a de plus

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{a}(z(x))|^2 dx \leq C \|a\|_2^2 \leq \frac{C}{|I|}$$

Et il vient alors que $\tilde{a}$ est à une constante multiplicative près une molécule. On en déduit que T_1 est borné sur $H^1(\Gamma)$ puisque tout atome peut être centré en 0 par un changement de paramétrisation normale.

Nous disposons à présent de tous les ingrédients pour démontrer le théorème qui suit, qui est une version géométrique de la proposition 10.

Théorème 4 : Soit Γ une courbe de Jordan rectifiable vérifiant la condition corde-arc. Les quatre proposition suivantes sont alors équivalentes.

(1) $L^2(\Gamma) = H^2(\Omega_1) + H^2(\Omega_2)$

(2) $\forall p > 1 \quad L^p(\Gamma) = H^p(\Omega_1) + H^p(\Omega_2)$

(3) $\frac{1}{z'} H^1(\Gamma) = H^1(\Omega_1) + H^1(\Omega_2)$

(4) $BMO(\Gamma) = BMOA(\Omega_1) + BMOA(\Omega_2)$

Le signe + désignant à chaque fois somme directe topologique.

Démonstration : Supposons d'abord (1) vérifié. Alors T est borné sur $L^2(\Gamma)$ d'après le théorème 1 et donc, par la proposition 10, T_1 est borné sur $H^1(\Gamma)$, T est borné sur $L^p(\Gamma)$ pour tout $p > 1$ et sur $BMO(\Gamma)$. Mais $L^2(\Gamma)$ est dense dans tous ces espaces et $T^2 = \frac{1}{4} I$ comme opérateur sur L^2. On a donc

$$T_1^2 = \frac{1}{4} I \text{ comme opérateur sur } H^1(\Gamma)$$

$$\forall\, p > 1 \qquad T^2 = \frac{1}{4} I \text{ comme opérateur sur } L^p(\Gamma)$$

$$T^2 = \frac{1}{4} I \text{ comme opérateur sur } BMO(\Gamma)$$

et par conséquent

$$H^1(\Gamma) = \mathrm{Ker}\left(T_1 - \tfrac{1}{2} I\right) + \mathrm{Ker}\left(T_1 + \tfrac{1}{2} I\right)$$

$$\forall p > 1 \quad L^p(\Gamma) = \mathrm{Ker}\left(T - \tfrac{1}{2} I\right) + \mathrm{Ker}\left(T + \tfrac{1}{2} I\right)$$

$$BMO(\Gamma) = \mathrm{Ker}\left(T - \tfrac{1}{2} I\right) + \mathrm{Ker}\left(T + \tfrac{1}{2} I\right)$$

ce qui est équivalent à (2), (3), (4), d'après les propositions 5, 6, 8, 9 et le fait que Ω_1 est un domaine de Smirnov.

Réciproquement, supposons (2), (3) ou (4) vérifié. Comme les projections correspondant à la décomposition sont nécessairement $T + \frac{1}{2} I$ et $T - \frac{1}{2} I$ (ou $T_1 + \frac{1}{2}$, $T_1 - \frac{1}{2}$), on en déduit l'une des conclusions suivantes, T est borné sur L^p pour $p > 1$, T est borné sur BMO, T_1 est borné sur H^1 et chacune de ces propositions permet de conclure que T est borné sur L^2 par interpolation. Une nouvelle application du théorème 1 achève alors la démonstration du théorème 4.

c) Une caractérisation de $H^1(\Gamma)$ à l'aide d'une intégrale singulière.

Théorème 5 : Soit Γ une courbe de Calderón vérifiant la condition corde-arc. Sont alors équivalents pour une fonction f définie sur Γ.

(1) $f \in H^1(\Gamma)$

(2) $f \in L^1(\Gamma)$ et $T_1 f \in L^1(\Gamma)$

Ce théorème généralise un résultat de Fabes et Kenig ([10]). Ces auteurs démontrent le théorème 5 pout des courbes de classe C^1 sans point stationnaire et nous verrons (chapitre III) que ces courbes sont des cas particuliers de courbes de Calderón.

Passons à la démonstration du théorème 5. (1) ⇒ (2) provient de la proposition 10.
Pour la réciproque, il suffit de montrer, en replaçant f par f/z' que $f \in L^1(\Gamma)$ et $Tf \in L^1(\Gamma)$ implique que $C_1 f = \frac{1}{2} f + Tf \in H^1(\Omega_1)$. On en déduira en effet que $C_2 f = \frac{1}{2} f - Tf \in H^1(\Omega_2)$ (puisque $C_2 f \in L^1$ et $C_1(C_2 f) = C_2(C_1 f) = 0$) puis que $f = C_1 f + C_2 f \in H^1(\Gamma)$ d'après la proposition 9. Posons alors

$$F(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz$$

pour $\zeta \in \Omega_1$.

Posons également $$T^* f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} |T_\varepsilon f(z)|$$

et $f^*(z)$ désignera la fonction maximale de Hardy-Littlewood associée à f.

Lemme : Avec les notations du théorème 3, il existe $K > 0$ telle que

$$\forall z \in \Gamma \quad F_c^*(z) \le K \left(T^* f(z) + f^*(z) \right)$$

Démonstration : Soit $z_0 \in \Gamma$ et $\zeta \in \Gamma_{z_0}^C$. Posons $\alpha = d(\zeta, \Gamma)$, alors

$$\left| \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz - \int_{|z-z_0| \ge 2C\alpha} \frac{f(z)\, dz}{z-z_0} \right| = \left| \int_{|z-z_0| \le 2C\alpha} \frac{f(z)\, dz}{z-\zeta} + \int_{|z-z_0| \ge 2C\alpha} \frac{(\zeta - z_0) f(z)\, dz}{(z-z_0)(z-\zeta)} \right|$$

$$\le \frac{1}{\alpha} \int_{|z-z_0| \le 2C\alpha} |f(z)|\, |dz| + K\alpha \int_{|z-z_0| \ge 2C\alpha} \frac{|f(z)|\, |dz|}{|z-z_0|^2}$$

Considérons maintenant une paramétrisation normale z de Γ telle que $z(0) = z_0$. Il vient alors, en utilisant la condition corde-arc,

$$\le \frac{1}{\alpha} \int_{|x| \le 2C\alpha} |f(z(x))|\, dx + K'\alpha \int_{|x| \ge k\alpha} \frac{|f(z(x))|\, dx}{x^2}$$

et ceci est classiquement majoré par $K\, f^*(z(0))$.

Le lemme en découle facilement.

Des méthodes de variable réelle analogues à celles du théorème de la proposition 10 montrent que T^* envoie L^1 dans L^1_{faible}. Comme il en est de même de $f \to f^*$ on en déduit que si $f \in L^1(\Gamma)$, $F_C^* \in L^1_{faible}(\Gamma)$ et donc, d'après l'inégalité de Kolmogorov à tous les $L^p(\Gamma)$ pour $0 < p < 1$. Le théorème 3 affirme alors que F appartient à tous les $H^p(\Omega_1)$ pour $p \in (0,1)$. Mais la valeur au bord de F qui est $f/2 + Tf$ appartient à L^1 par hypothèse. Comme Ω_1 est un domaine de Smirnov, on en déduit (voir [9]) que $F \in H^1(\Omega_1)$.

***

III - COURBES PRESQUE REGULIERES

1) Définition et caractérisation des courbes presque régulières.

Définition : Soit Γ un arc de Jordan rectifiable. On dit que Γ est presque régulier si l'on a

$$\forall \varepsilon>0\ ,\ \exists \eta>0 \quad \forall M_1, M_2 \in \Gamma \quad M_1M_2 \leq \eta \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{M_1M_2}}{M_1M_2} - 1 \leq \varepsilon$$

Propriétés immédiates :

- Toute courbe fermée simple de classe C^1 sans point stationnaire est presque régulières.
- Tout arc de Jordan presque régulier vérifie la condition corde-arc.

Nous allons établir une caractérisation des courbes de Jordan presque régulières portant sur la paramétrisation normale. Rappelons que VMO($\mathbb{T}$) désigne l'adhérence dans BMO($\mathbb{T}$) de l'espace des fonctions continues 2π-périodiques.
Cet espace a été introduit par Sarason ([23]).

Proposition 11 : Soit Γ un arc de Jordan rectifiable de longueur 2π et $s \to z(s)$ une paramétrisation normale de Γ. Alors Γ est presque régulière si et seulement si $z' \in \mathrm{VMO}(\mathbb{T})$.

Démonstration : Supposons tout d'abord que $z' \in \mathrm{VMO}(\mathbb{T})$. Alors (voir [23]),

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta>0\ \forall I \quad |I| \leq \eta \Rightarrow \frac{1}{|I|}\int_I |z'(t) - m_I z'|^2\, dt \leq \varepsilon$$

Si $I = [a,b]$ on trouve, par un calcul immédiat, sachant que $|z'| = 1$ presque partout

$$\frac{1}{|I|}\int_I |z'(t) - m_I z'|^2\, dt = 1 - \left|\frac{z(b) - z(a)}{b-a}\right|^2$$

Si l'on a choisi $\eta < \pi$, alors, en posant $M_a = z(a)$ et $M_b = z(b)$

$$|z(b) - z(a)| = M_a M_b \qquad b - a = \widehat{M_a M_b}$$

et l'on a montré

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall M_1, M_2 \in \Gamma \quad \widehat{M_1 M_2} \leq \eta \Rightarrow 1 - \frac{M_1 M_2}{\widehat{M_1 M_2}} \leq \varepsilon$$

En particulier, pour $\varepsilon < 1/2$, $M_1 M_2 \leq \eta \Rightarrow \widehat{M_1 M_2} \leq 2 M_1 M_2$, et donc

$$\widehat{M_1 M_2} \leq \eta \Rightarrow \frac{\widehat{M_1 M_2}}{M_1 M_2} - 1 \leq 2\varepsilon$$

Il reste à montrer

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \eta' > 0 \quad M_1 M_2 \leq \eta' \Rightarrow \widehat{M_1 M_2} \leq \eta$$

Soit φ l'application de $\mathbb{T}$ sur Γ définie par $z(s) = \varphi(e^{is})$. Alors φ est une bijection continue de $\mathbb{T}$ sur Γ, donc bicontinue, et par conséquent

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \gamma > 0 \quad \forall M_1, M_2 \in \Gamma \quad M_1 M_2 \leq \gamma \Rightarrow |\varphi^{-1}(M_1) - \varphi^{-1}(M_2)| \leq \delta$$

mais $$\frac{2}{\pi} \widehat{M_1 M_2} \leq |\varphi^{-1}(M_1) - \varphi^{-1}(M_2)| \leq \widehat{M_1 M_2}$$

ce qui termine le raisonnement.

Réciproquement supposons que Γ soit presque régulière.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad M_1 M_2 \leq \eta \Rightarrow 1 - \frac{M_1 M_2}{\widehat{M_1 M_2}} \leq \varepsilon$$

Il vient alors, pour $b - a \leq \eta < \pi$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |z'(t) - m_{[a,b]} z'|^2 dt \leq 2 \left(1 - \frac{M_a M_b}{\widehat{M_a M_b}} \right) \leq 2\varepsilon$$

Ce qui prouve ([23]) que $z' \in \mathrm{VMO}(\mathbb{T})$.

Avant de passer à la caractérisation annoncée des courbes presque régulières, introduisons quelques notations qui allègent les énoncés.

Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est presque uniformément continue (p.u.c.) si elle est localement intégrable et vérifie
$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0 / \forall$ I intervalle de $\mathbb{R}$

$$(1) \qquad |I| \leq \eta \Rightarrow \frac{1}{|I|} \int_I |f(t) - m_I f|\, dt \leq \varepsilon$$

Une famille $\mathcal{E}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est dite également p.u.c. si la condition (1) est réalisée uniformément sur $\mathcal{E}$. C'est alors une conséquence immédiate des résultats de Sarason que toute famille de $\mathcal{E}$ qui est également p.u.c. est relativement compacte dans chaque BMO(I), où I désigne un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

Proposition 12 : Soit $f \in VMO(\mathbb{T})$ telle que $|f(t)| = 1$ presque partout. Alors, il existe une unique fonction $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ p.u.c. telle que

$$f(t) = e^{i\alpha(t)} \quad \text{p.p.}$$

Démonstration : Nous ne démontrerons que l'existence d'une telle fonction, seul résultat dont nous aurons besoin. Signalons simplement que l'unicité provient du fait qu'une fonction ne prenant que des valeurs entières ne peut appartenir à VMO.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$f_k(s) = k \int_s^{s+\frac{1}{k}} f(t)\, dt$$

Alors f_k est continue et converge vers f dans VMO ([23]). De plus, la suite (f_k) est également p.u.c. D'autre part, puisque $f \in VMO$,

$$\exists \delta > 0 \ /\ \forall I \quad |I| \leq \delta \Rightarrow \frac{1}{|I|} \int_I |f - m_I f| \leq \frac{1}{2}$$

et donc, puisque $|f(t)| = 1$ p.p.

$$|I| \leq \delta \Rightarrow \frac{1}{2} \leq |m_I f| \leq 1$$

D'après le théorème classique de relèvement pour les fonctions continues, il existe une fonction $\alpha_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$f_k(s) = e^{i\alpha_k(s)} \qquad \text{pour} \quad k \geq \frac{1}{\delta}$$

Montrons que la suite $(\alpha_k)_{k\geq 1/\delta}$ est également p.u.c. Pour cela, nous allons utiliser le lemme suivant dû à Coifman et Meyer ([20]).

Lemme : Il existe deux constantes C, >0 telles que, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2} \leq |g(x)| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|g\|_{BMO} \leq \gamma$$

la fonction f (définie à 2π près) continue telle que

$$g(x) = \exp(i f(x))$$

vérifie $\|f\|_{BMO} \leq C \|g\|_{BMO}$

Soit alors $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \gamma/6$ et η tels que

$$\forall I \quad |I| \leq \eta \Rightarrow \forall k \geq \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{|I|}\int_I |f_k(t) - m_I f_k|\, dt \leq \varepsilon$$

Fixons $I = [a,b]$ un intervalle de longueur $\leq \eta$. Pour φ fonction définie sur $\mathbb{R}$, appelons $\widetilde{\varphi}$ la fonction périodique de période $2|I|$ qui vaut φ sur $[a,b]$ et telle que

$$\widetilde{\varphi}(2b-a-x) = \widetilde{\varphi}(a+x) \quad \text{pour } x \in [0, b-a]$$

Alors $\widetilde{f}_k$ et $\widetilde{\alpha}_k$ sont continues, et l'on a $\widetilde{f}_k(t) = e^{i\widetilde{\alpha}_k(t)}$. Mais il est facile de voir que

$$\|\widetilde{f}_k\|_{BMO(\mathbb{R})} \leq 6 \|f_k\|_{BMO(I)} \leq 6\varepsilon \leq \gamma$$

et donc, par le lemme, $\|\alpha_k\|_{BMO(I)} \leq C\ \varepsilon$, ce qui prouve que la suite (α_k) est également p.u.c.

On en déduit que la suite (α_k) est relativement compacte dans tous les BMO(J), pour J intervalle borné. En considérant les intervalles $[-n,n]$, on peut donc trouver une sous-suite de α_k qui converge dans BMO sur tout compact vers une fonction α qui sera p.u.c. En utilisant la dualité H^1 - BMO, on voit que quitte à extraire une autre sous-suite, on peut encore supposer que la convergence a lieu presque partout.

Comme d'autre part f_k tend vers f presque partout, on a bien

$$f(t) = e^{i\alpha(t)} \quad p.p.$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème caractérisant les courbes presque régulières.

Théorème 6 : Soit Γ une courbe de Jordan rectifiable et $s \to z(s)$ sa paramétrisation normale. Γ est presque régulière si et seulement si il existe une fonction α p.u.c. telle que

$$z'(s) = e^{i\alpha(s)} \qquad \text{presque partout.}$$

Démonstration : Si Γ est presque régulière, alors z' est dans VMO($\mathbb{T}$) (proposition 11) et l'existence de la fonction α provient alors de la proposition 12.
Réciproquement, on voit, en utilisant l'inégalité $|e^{it} - 1| \leq |t|$, que si α est une fonction p.u.c. telle que $e^{i\alpha}$ soit 2π-périodique, alors $e^{i\alpha} \in$ VMO($\mathbb{T}$)

Nous allons maintenant utiliser cette caractérisation pour donner un exemple de courbe presque régulière qui ne soit pas de classe C^1.

Pour cela, il faut trouver une fonction qui soit p.u.c. sans être continue.

Lemme : La fonction $t \to |\text{Log } |t||^{1/2}$ est p.u.c. au voisinage de 0.

Montrons que $f(x) = |\text{Log } |x||^{1/2} \in \text{VMO}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$. En utilisant la parité de f, on est amené à étudier trois types d'intervalles ;

1) $I = [a, b] \quad 0 < a \leq \frac{b}{2}$

Alors

$$\int_a^b (f(x) - f(t))\,dx \leq \frac{1}{\text{Log } 1/b} \int_a^b \text{Log } \frac{b}{x}\,dx$$

$$\leq \frac{b}{\text{Log } 1/b} \int_{a/b}^1 \text{Log } \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{2(b-a)}{|\text{Log } 2(b-a)|}$$

Finalement $m_I|f - m_I f| \leq \dfrac{4}{|\text{Log } 2|I||}$.

2) $I = [a, b] \quad a > b/2 > 0$

$$\int_a^b (f(x) - f(b))\,dx \leq \frac{1}{\log 1/b} \int_a^b \log b/x \, dx \leq \frac{(b-a)\log 2}{\log 1/b}$$

et $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \gamma > 0 \quad b \leq \gamma \Rightarrow \dfrac{\log 2}{\log 1/b} \leq \varepsilon$

donc, si $b \leq \gamma$, $m_I |f - m_I f| \leq \varepsilon$.
Pour $b > \gamma$ (ce qui implique $a > \gamma/2$) il suffit d'utiliser la continuité de f sur $[\gamma/2, 1/2]$.

3) $I = [a, b] \quad a < 0, \; b > |a|$

$$\int_a^b [f(x) - f(b)]\,dx \leq 2 \frac{\int_0^b \log b/x \, dx}{\log 1/b}$$

$$\leq \frac{2b}{\log 1/b} \leq \frac{2(b-a)}{|\log(b-a)|}$$

Et le résultat en découle.

Le courbe définie intrinsèquement par $z'(s) = e^{i\sqrt{|\log|s||}}$ pourrait donc convenir si on savait qu'elle définit une courbe de Jordan. Comme cela est difficile à vérifier, nous allons considérer la courbe définie par la paramétrisation suivante (au voisinage de 0)

$$z(t) = t\, e^{i\sqrt{|\log|t||}}$$

Il est facile de voir que z est injective dans un voisinage de 0, et l'on raccorde alors de manière à obtenir un arc de Jordan ayant l'aspect suivant :

Vérifions que cette courbe est presque régulière.
Il suffit de la voir au voisinage de 0. Or, au voisinage de 0, on a :

$$z'(t) = e^{i\sqrt{|\mathrm{Log}|t||}} - \frac{i}{2\sqrt{|\mathrm{Log}|t||}}\, e^{i\sqrt{|\mathrm{Log}|t||}}$$

$e^{i\sqrt{|\mathrm{Log}\,|t||}} \in \mathrm{VMO}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ d'après le lemme précédent et l'autre fonction également car elle est continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, de plus il existe α, β, $0 < \alpha < \beta$ tels que

$$\alpha \leqslant |z'(t)| \leqslant \beta \qquad (t \in [-1/2\,,\ 1/2])$$

on en déduit facilement, en utilisant VMO, que

$$\exists\, \delta > 0 \quad |I| \leqslant \delta \Rightarrow |m_I z'| \geqslant \alpha/2$$

La condition VMO sur z' s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall I\,,\ |I| \leqslant \eta \Rightarrow m_I |z' - m_I z'| \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$|m_I z'| \left(\frac{\int_I |z'|}{\left| \int_I z' \right|} - 1 \right) \leqslant \varepsilon$$

et par conséquent :

$$|I| \leq \inf(\pi, \eta, \delta) \Rightarrow \frac{|I|}{\left|\int_I z'\right|} - 1 \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha}$$

Ce qui est exactement la condition corde-arc des courbes presque régulières.

2) Les courbes presque régulières et la transformation conforme.

Si Γ est un arc de Jordan de classe C^1 sans point singulier, et si $t \to f(t)$, $[0,2\pi] \to \mathbb{C}$ désigne une paramétrisation C^1 régulière de Γ alors, si α désigne la fonction angulaire associée à f' ($f'(t) = e^{i\alpha(t)}$), on a :

$$\alpha(t+2\pi) = \alpha(t) + 2\pi$$

Ce résultat, "l'Umlaufsatz", est classique (voir [2]).

Proposition 13 : Soit Γ une courbe de Jordan presque régulière de longueur 2π. Si α désigne la fonction angulaire attachée à Γ et définie par le théorème 6, on a

$$\alpha(t+2\pi) = \alpha(t) + 2\pi \qquad \text{presque partout.}$$

Et en particulier $t \to \alpha(t) - t \in VMO(\mathbb{T})$.

La démonstration consiste à "approcher" la courbe Γ par des courbes de classe C^1 sans point stationnaire.
Quitte à translater Γ, on peut se ramener au cas où une paramétrisation normale de Γ est donnée par

$$z(s) = \int_0^1 e^{i\alpha(t)}\, dt$$

Posons alors, comme plus haut, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_k(s) = k\left(z(s+1/k) - z(s)\right)$$

et

$$z_k(t) = \int_0^t f_k(s)\, ds$$

Alors $t \to z_k(t)$ est 2π-périodique de classe C^1, et régulier.

De plus, d'après les résultats précédents, z_k converge uniformément vers z sur $[0,2\pi]$.

Montrons maintenant que, pour k assez grand, la courbe Γ_k paramétrée par z_k est une courbe de Jordan. On sait qu'il existe k_o tel que $k \geq k_o \Rightarrow \frac{1}{2} \leq |f_k(s)|$ pour tout s.
D'autre part, il existe $\delta \in]0,\pi[$ tel que, pour tout a, b, $a<b$ et $b-a \leq \delta$, on ait

$$\forall\, k \geq k_o \qquad \frac{1}{b-a} \int_a^b |f_k(t) - m_{[a,b]} f_k|\, ds \leq \frac{1}{4}$$

ceci parce que $z' \in VMO$.

- Si $0 < b-a \leq \delta$, on ne peut avoir $z_k(a) = z_k(b)$, car ceci impliquerait $m_{[a,b]}(f_k) = 0$, et par conséquent

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |f_k(s)|\, ds \leq \frac{1}{4}$$

ce qui est impossible puisque $|f_k(s)| \geq \frac{1}{2}$ pour $k \geq k_o$.

- Si $\pi \geq b-a > \delta$, alors $\exists\, C > 0$ tel que

$$|z(b) - z(a)| > C$$

et d'autre part, $\exists\, k_1 \geq k_o$, $k \geq k_1 \Rightarrow \|z - z_k\|_\infty \leq \frac{C}{4}$, et par conséquent $\forall\, k \geq k_1$ et $\pi \geq b-a > \delta$,

$$|z_k(b) - z_k(a)| = |z_k(b) - z(b) + z(b) - z(a) + z(a) - z_k(a)| \geq \frac{C}{2}$$

Ce qui montre que Γ_k est une courbe de Jordan pour $k \geq k_1$. On a $f_k(t) = e^{i\alpha_k(t)}$, où α_k est une fonction continue définie à 2π près. Comme Γ_k est C^1 sans point stationnaire

$$\alpha_k(t+2\pi) = \alpha_k(t) + 2\pi$$

Mais, quitte à extraire une sous-suite, on sait que l'on peut supposer que α_k converge simplement vers α, il vient

$$\alpha(t+2\pi) = \alpha(t) + 2\pi \quad \text{p.p.}$$

Ceci prouve que $\alpha(t) - t$ est 2π-périodique. Comme c'est de plus une fonction p.u.c., en en déduit que

$$\alpha(t) - t \in VMO(\mathbb{T})$$

Nous somme maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant, qui fournit une caractérisation des courbes de Jordan presque régulières à l'aide de la transformation conforme.

Théorème 7 : Soit Γ une courbe de Jordan de longueur 2π et Φ_1 une transformation conforme de D sur Ω_1, l'intérieur de Γ. Alors Γ est presque régulière si et seulement si

$$\operatorname{Log} \phi_1' \in VMOA(D)$$

(L'espace VMOA(D), introduit par Pommerenke [22], désigne $H^1(D) \cap VMO(\mathbb{T})$.)

Démonstration : Supposons tout d'abord que Γ est presque régulière. Alors Γ vérifie la condition corde-arc et l'on sait alors que

$$|\phi_1'(e^{it})| \in A^p(\partial D) \qquad \text{pour p assez grand,}$$

et $$\operatorname{Log} \phi_1' \in BMOA(D)$$

et l'on a $\Phi_1(e^{it}) = z(h(t))$, où $h \in \mathcal{G}$ (voir II).
On a donc, presque partout,

$$i e^{it} \phi_1'(e^{it}) = h'(t)\, e^{i\alpha(h(t))}$$

Posons
$$v(t) = \alpha(h(t)) - t - \frac{\pi}{2}$$
$$= \alpha(h(t)) - h(t) + h(t) - t - \frac{\pi}{2}$$

Alors $v(t) \in VMO(\mathbb{T})$. En effet, $\beta(t) = \alpha(t) - t \in VMO(\mathbb{T})$ et, puisque $h \in \mathcal{G}$, il en est de même de $\beta \circ h$. De plus, $h(t) - t$ est 2π-périodique et continue, donc appartient à $VMO(\mathbb{T})$.

Soit maintenant $\tilde{v}(t)$ la transformation de Hilbert de v. Alors $\tilde{v} \in VMO(\mathbb{T})$, et

$$\gamma(t) = -\tilde{v}(t) + i v(t) \in VMOA(D)$$

et de plus

$$v(t) - \operatorname{Arg} \phi'(e^{it}) \in 2i\pi\mathbb{Z} \qquad \text{presque partout.}$$

Mais, puisque $\gamma \in VMOA$, appartient en particulier à l'adhérence de L^∞ dans BMO. On sait alors (voir [13]) que l'inégalité de John et Nirenberg est valable pour γ avec n'importe quelle constante.
En particulier, $e^{-\gamma}$ appartient à tous les $H^p(D)$ pour $p > 0$. Mais, on l'a vu au II, il existe $p > 1$ tel que $\Phi_1' \in H^p(D)$. Si q désigne l'exposant conjugué de p, il vient, par l'inégalité de Hölder, puisque $e^{-\gamma} \in H^q(D)$,

$$\phi_1' \, e^{-\gamma} \in H^1(D)$$

Mais cette fonction est réelle d'après ce qui a été vu. Ceci n'est possible que si la fonction est constante, et donc

$$\operatorname{Log} \phi_1' = \gamma + \text{Cste}$$

ce qui prouve que $\operatorname{Log} \Phi_1' \in VMOA(D)$.
Supposons réciproquement que $\operatorname{Log} \Phi_1' \in VMOA(D)$. Alors, toujours d'après [13], $|\Phi_1'| \in A^2(\partial D)$, et il existe $h \in \mathcal{G}$ tel que

$$z(s) = \phi_1(e^{ih(s)})$$

soit une représentation paramétrique normale de Γ. Alors

$$z'(s) = i e^{ih(s)} h'(s) \, \phi_1'(e^{ih(s)})$$

$$= e^{i(\operatorname{Arg} \phi_1'(e^{ih(s)}) + h(s) + \pi/2)} = e^{i\alpha(s)}$$

et la fonction α ainsi définie est p.u.c.
Une application du théorème 6 montre alors que Γ est presque régulière.

Remarque : Si Γ est presque régulière, alors $|\Phi_1'|$ appartient à tous les $A^p(\partial D)$ pour $p > 1$. Cela provient de [13], déjà utilisé dans la démonstration.

3) Le théorème de Calderón.

Dans cette partie, nous nous proposons de montrer que toute courbe presque régulière est une courbe de Calderón. En fait, nous allons redémontrer pour ces courbes la proposition 2 du I.

Théorème 8 : Soit Γ une courbe de Jordan presque régulière. Alors, pour toute $f \in L^2(\Gamma)$,

$$Tf(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon f(z)$$

existe pour presque tout $z \in \Gamma$, et l'opérateur maximal

$$T^* f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| T_\varepsilon f(z) \right|$$

est borné sur $L^2(\Gamma)$.

La démonstration du théorème 8 consiste à appliquer, à l'aide d'une partition de l'unité, le théorème suivant dû à Coifman et Meyer et qui est l'analogue, pour les courbes vérifiant la condition corde-arc, du théorème de Calderón ([3]) sur les courbes vérifiant une condition Lipschitz.

La démonstration de ce théorème de Coifman et Meyer se trouve dans [20].

Théorème * : Soit b une fonction de BMO($\mathbb{R}$) , réelle et $z(X) = \int_0^x e^{ib(u)}\, du$. Il existe deux constantes C, $\gamma_2 > 0$, telles que, si $\|b\|_{BMO} \leq \gamma_2$, la courbe paramétrée par z(X) est un arc de Jordan Γ partageant le plan et l'opérateur

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \frac{f(y)\, dy}{z(y) - z(x)}$$

existe presque partout pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$ et définit un opérateur borné de norme $\leq C$ ainsi que l'opérateur maximal associé.

Passons à présent à la démonstration du théorème 8. On a vu que Γ est presque régulière si et seulement si elle admet une paramétri-

sation normale du type

$$z(s) = \int_0^s e^{i\alpha(t)}\, dt$$

avec $\alpha(t) - t \in VMO(\mathbb{T})$, on suppose toujours que Γ est de longueur 2π). Il existe donc un entier N tel que, pour tout intervalle I de longueur $\leq 2\pi/N$, on ait

$$\frac{1}{|I|} \int_I |\alpha(t) - m_I \alpha|\, dt \leq \frac{\gamma_2}{6}$$

On découpe alors l'intervalle $[0,2\pi]$ en 3N intervalles égaux (J_k) et on appelle I_k l'intervalle ouvert de longueur $\frac{2\pi}{2N}$ et de même centre que J_k.

Considérons alors une partition de l'unité associée à (I_k) et (J_k), c'est-à-dire (χ_k) vérifiant

$$\begin{cases} \chi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \operatorname{supp} \chi_k \subset I_k \quad \text{et} \quad \chi_k(x) = 1 \text{ si } x \in J_k \\ \sum_k \chi_k(x) = 1 \quad \text{pour } x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Pour $f \in L^2(\Gamma)$ et $x \in [0,2\pi]$, on a

$$T_\varepsilon f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{y \in [0,2\pi] \\ |x-y| \geq \varepsilon}} \frac{f(z(y))\, dz(y)}{z(y) - z(x)}$$

$$= \sum_{j,k} \chi_k(x)\, T_\varepsilon(\chi_j f)(x)$$

$$= \sum_{j,k} T_{j,k,\varepsilon}(f)(x)$$

Posons

$$T_{1,\varepsilon} = \sum_{\substack{j,k \text{ tels que} \\ \tilde{I}_j \cap \tilde{I}_k = \emptyset}} T_{j,k,\varepsilon} \qquad T_{2,\varepsilon} = T_\varepsilon - T_{1,\varepsilon}$$

où l'on a posé $\tilde{I} = \exp iI$.

L'étude de $T_{1,\varepsilon}$ ne pose pas de problème. Si $I_j \cap I_k = \emptyset$, on peut trouver une constante C ne dépendant que de Γ et N telle que

$$\forall x \in I_j \quad \forall y \in I_k \quad \frac{1}{|z(y)-z(x)|} \leq C$$

et l'on a alors tous les résultats désirés pour $T_{1,\varepsilon}$ qui n'est pas une intégrale singulière lorsque $\varepsilon \to 0$.

Supposons maintenant $I_j \cap I_k \neq \emptyset$, et étudions $T_{j,k,\varepsilon}$. Quitte à translater le paramétrage, on se ramène au cas où $I_j \cap I_k \neq \emptyset$, et l'on pose alors $I = I_j \cup I_k$. Alors $|I| \leq \frac{2\pi}{N}$, et par conséquent

$$\forall J \subset I \quad \frac{1}{|J|} \int_J |\alpha(t) - m_I \alpha| dt \leq \frac{\delta_2}{6}$$

on peut alors, comme on l'a déjà vu, prolonger α/I en $\tilde{\alpha}$ définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\| \tilde{\alpha} \|_{BMO(\mathbb{R})} \leq \gamma_2$$

Soit alors $\tilde{z}$ la primitive de $e^{i\tilde{\alpha}}$ qui vaut z sur I et $\tilde{T}$ l'opérateur

$$\tilde{T} f(x) = \text{V.p.} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)\, dy}{\tilde{z}(y) - \tilde{z}(x)}$$

D'après le théorème de Coifman et Meyer, cet opérateur est bien défini pour $f \in L^2$ et son opérateur maximal associé est borné sur L^2.
Comme on a

$$T_{j,k,\varepsilon}(f) = \chi_k \tilde{T}_\varepsilon (\chi_j \cdot f \circ z)$$

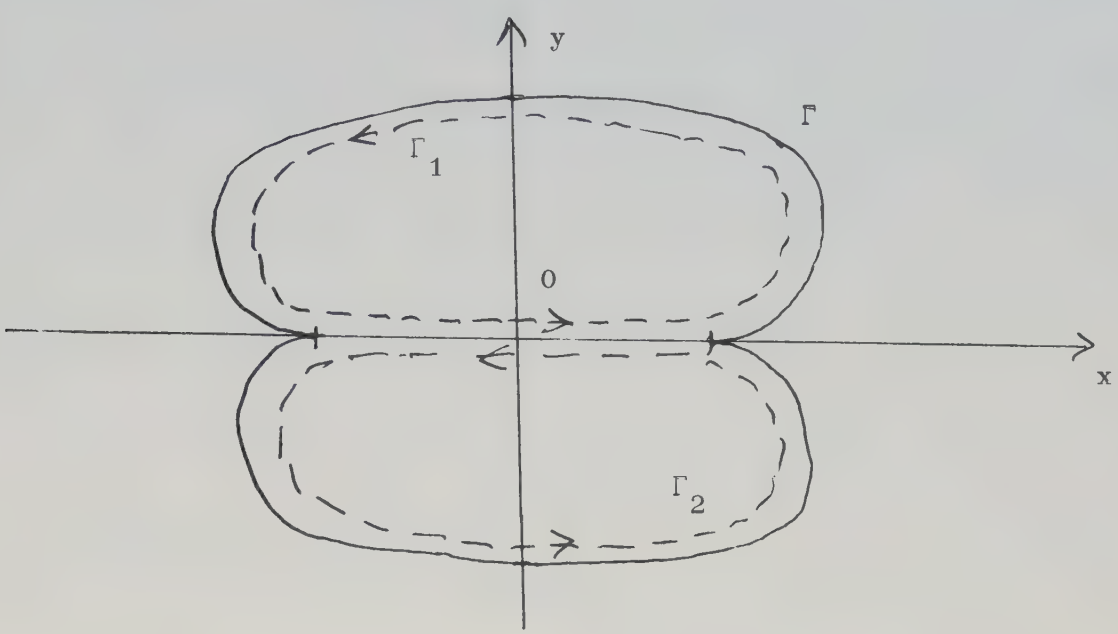
on en déduit l'existence presque partout de $\lim T_{2,\varepsilon}(f)(x)$, et le fait que T_2^* définisse un opérateur borné sur L^2. Le théoreme 8 est démontré.

Les courbes presque régulières sont donc des exemples de courbe Calderón vérifiant la condition corde-arc. Tous les résultats démontrés dans le II sont donc en particulier vrais pour ces courbes.

Remarque : On pourrait penser que la condition corde-arc est une condition nécessaire à la validité du théorème de Calderón. Nous allons voir

qu'il n'en est rien en considérant l'exemple suivant.

Nous allons considérer comme courbe Γ une sorte de néphroïde ayant l'allure suivante :



Il est immédiat de voir que les deux rebroussements interdisent la condition corde-arc.

Pour $f \in L^2(\Gamma)$, posons $\quad f_i = \begin{cases} f \text{ sur } \Gamma \cap \Gamma_i \\ 0 \text{ sur } \Gamma_i \setminus \Gamma \end{cases}$

Alors $f_i \in L^2(\Gamma_i)$. Soit T l'opérateur de Calderon pour Γ et T_i celui pour Γ_i.
Soit $z \in \Gamma \cap \Gamma_1$. Alors

$$Tf(z) = T_1 f_1(z) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{f_2(\vartheta)\, d\vartheta}{\vartheta - z}$$

$$= T_1 f_1(z) + F_2(z)$$

et $$\int_{\Gamma \cap \Gamma_1} |Tf(z)|^2 |dz| \leq C \left[\int_{\Gamma_1} |T_1 f_1(z)|^2 |dz| + \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma} |F_2(z)|^2 |dz| \right]$$

Γ_1 et Γ_2 sont évidemment presque régulières et même C^∞ sans point stationnaire et donc T_1 est borné sur $L^2(\Gamma_1)$. D'autre part, si l'on désigne par $\mathcal{E}_2$ "l'extérieur" de la courbe Γ_2, la fonction $F_2(z)$, définie pour $z \in \mathcal{E}_2$ appartient à $H^2(\mathcal{E}_2)$ et la mesure sur $\mathcal{E}_2$ définie par

$$\mu(\varphi) = \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma} \varphi(\xi)\, |d\xi|$$

est une mesure de Carleson pour $\mathcal{E}_2$ (voir [11] pour la définition des mesures de Carleson sur des domaines de classe C^1).

Comme les résultats relatifs aux mesures de Carleson sur la droite se généralisent à ces domaines, il vient

$$\int_{\Gamma_1 \cap \Gamma} |F_2(z)|^2\, |dz| \leq C \|F\|^2_{H^2(\mathcal{E}_2)} \leq C \|f_2\|^2_{L^2(\Gamma_2)}$$

et l'on en déduit que T est borné sur $L^2(\Gamma)$.

4) Une caractérisation de type Paley-Littlewood de $H^2(\Omega_1)$ si Γ est une courbe presque régulière.

Dans cette partie, nous allons mettre à profit le fait que si Γ est une courbe de Jordan presque régulière, alors $|\Phi_1'|$ appartient à tous les $A^p(\partial D)$ pour $p > 1$, et donc en particulier appartient à A^2.

Soit donc Γ une courbe de Jordan presque régulière de longueur 2π telle que $0 \in \Omega_1$.

Théorème 9 : Soit $f \in H^2(\Omega_1)$ et $\varphi \in BMOA(\Omega_1)$ si

$$h'(\zeta) = \varphi'(\zeta) f(\zeta) \quad \text{pour } \zeta \in \Omega_1 \text{ et } h(0) = 0$$

alors $$\|h\|_{H^2(\Omega_1)} \leq C \|f\|_{H^2(\Omega_1)} \|\varphi\|_{BMOA(\Omega_1)}$$

Ce théorème est une généralisation d'une inégalité de Pommerenke ([22]).

Démonstration : Posons $H) h \circ \Phi_1$, $F = f \circ \Phi_1$ et $\Psi = \varphi \circ \Phi_1$. Alors, d'après le résultat de C. Kenig ($f \in H^2(\Omega_1)$ si et seulement si $F \in H^2(D, |\Phi_1'|)$), le théorème 9 devient

$$\forall\, F \in H^2(D, |\Phi_1'|) \quad \forall\, \Psi \in BMOA(D)$$

$$H' = F\psi' \text{ et } H(0) = 0 \Rightarrow \|H\|_{H^2(D,\Phi_1)} \leq C \|F\|_{H^2(D,\Phi_1')} \|\psi\|_{BMC}$$

Ainsi le théorème 9 apparaît comme une version "à poids" de l'inégalité de Pommerenke. Pour le démontrer, nous allons imiter la démonstration de cet auteur.

Lemme 1 : Soit $\varphi \in BMOA(D)$ et $\omega \in A^2(\partial D)$. Alors la mesure sur D définie par

$$d\mu(re^{it}) = (1-r)\,|\varphi'(re^{it})|^2\,\omega(e^{it})$$

vérifie

$$\mu(Q) \leq C\,\omega(I)\,\|\varphi\|^2_{BMOA(D)}$$

pour tout intervalle I de la forme $I = \{e^{it},\ t \in [\theta_1, \theta_2]\}$, pour lequel Q désigne $\{re^{it},\ e^{it} \in I,\ 1-r \in [0, \theta_2 - \theta_1]\}$.

Il s'agit de montrer que μ est une mesure de Carleson par rapport au poids ω.
On procède alors comme dans [24], p. 146. Soit I^* l'intervalle "double" de I et on écrit,

$$\varphi = m_{I^*}\varphi + (\varphi - m_{I^*}\varphi)\,1_{I^*} + (\varphi - m_{I^*}\varphi)\,1_{I^{*c}}$$
$$= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

Alors

$$|\varphi'(z)|^2 = |\nabla\varphi_2(z) + \nabla\varphi_3(z)|^2 \leq C\left(|\nabla\varphi_2(z)|^2 + |\nabla\varphi_3(z)|^2\right)$$

si l'on confond φ_2 (définie sur ∂D) avec son intégrale de Poisson, idem pour φ_3.

Avant d'analyser l'apport de φ_2 et φ_3 rappelons la définition de la fonction de Paley-Littlewood.
Soit $\varphi \in L^2(\partial D)$ et $\varphi(z)$ son intégrale de Poisson. On pose

$$g(\varphi)(e^{it}) = \left(\int_0^1 r(1-r)\,|\nabla\varphi(re^{it})|^2\,dr\right)^{1/2}$$

Et l'on a $\forall\ p>1$, $\|g(\varphi)\|_p \approx \|\varphi\|_p$ ([ ]).
Par intégration en polaires, on peut alors écrire

$$\iint_Q (1-r)\,|\nabla \varphi_2(re^{it})|^2\,\omega(e^{it})\,dz\,d\bar{z} \lesssim \int_I \omega(e^{it})\left[g(\varphi_2)(e^{it})\right]^2 dt .$$

Mais $\omega \in A^2$, et par conséquent ω vérifie une inégalité de Hölder inversée pour un certain $p>1$. En désignant par q l'exposant conjugué de p, il vient, en appliquant Hölder à la précédente inégalité

$$\begin{aligned}
\int_I \omega(e^{it})\left[g(\varphi_2)(e^{it})\right]^2 dt &\lesssim \left(\int_I \omega(e^{it})^p\,dt\right)^{1/p} \|g(\varphi_2)\|_{2q}^2 \\
&\lesssim C\,|I|^{1/p-1}\,\omega(I)\left(\int_{I^*} |\varphi(e^{it}) - m_{I^*}\varphi|^{2q}\,dt\right)^{1/q} \\
&\lesssim C\,|I|^{1/p-1}\,\omega(I)\,|I^*|^{1/q}\,\|\varphi\|_{BMO}^2 \\
&\lesssim C\,\omega(I)\,\|\varphi\|_{BMO}^2 .
\end{aligned}$$

Pour φ_3 le raisonnement de [24] s'applique mot pour mot, et le lemme 1 s'en déduit.

Lemme 2 : Avec les notations du lemme 1, soit $f \in L^2(\partial D, \omega)$ et $f(z)$ son intégrale de Poisson. Alors

$$\iint_D |f(z)|^2\,d\mu(z) \le C\,\|\varphi\|_{BMO}^2\,\|f\|_{L^2(\omega dx)}^2 .$$

Démonstration : Puisque la mesure ω est de type homogène, les mêmes arguments que dans [24] nous montrent que l'on a l'inégalité

$$\iint_D |f(z)|^2\,d\mu(z) \lesssim C\,\|\varphi\|_{BMO}^2 \int_{\partial D} |f^*(z)|^2\,\omega(z)\,|dz|$$

où f^* désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood de f.

Le lemme 2 provient alors du fait que $f \to f^*$ est borné sur L^2_ω lorsque $\omega \in A^2$ ([5]).

Fin de la démonstration du théorème :

$$\iint_D |H'(z)|^2 (1-|z|)\, \omega\left(\frac{z}{|z|}\right) dz\, d\bar{z} = \iint_D |F(z)|^2 (1-|z|)\, |\Psi'(z)|^2\, \omega\left(\frac{z}{|z|}\right) dz\, d\bar{z}$$

où $\omega(e^{it}) = |\Phi_1'(e^{it})| \in 1$. Si $\omega \in A^2$ et $F \in H^2(D,\omega)$, alors $F \in H^1(D)$ car

$$\left(\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|\, d\theta\right) \leq \left(\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^2\, \omega(e^{i\theta})\, d\theta\right) \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega(e^{i\theta})}\, d\theta\right).$$

D'après les lemmes 1 et 2, on a alors

$$\iint_D |F(z)|^2 (1-|z|) |\Psi'(z)|^2\, \omega\left(\frac{z}{|z|}\right) dz\, d\bar{z} \leq C \|F\|^2_{H^2(D,\omega)} \|\Psi'\|_{BMO}$$

Enfin, c'est un résultat de C. Kenig ([19]) que si $F \in H^2(D, |\Phi_1'|)$ et $F(0) = 0$, alors

$$\iint_D |H'(z)|^2 (1-|z|) \left|\Phi_1'\left(\frac{z}{|z|}\right)\right| dz\, d\bar{z} \geq \|H\|^2_{H^2(D,|\Phi_1'|)}$$

et le théorème 9 s'en déduit.

Pour terminer, nous allons déduire du théorème 9 un résultat qui généralisera un théorème de Dahlberg [7].

Théorème 10 : Si Γ est une courbe de Jordan presque régulière et f une fonction holomorphe dans Ω_1

$$f \in H^2(\Omega_1) \iff \iint_{\Omega_1} |f'(z)|^2\, d(z,\Gamma)\, dz\, d\bar{z} < +\infty .$$

Démonstration : Par le changement de variable $z = \Phi_1(u)$

$$\iint_{\Omega_1} |f'(z)|^2\, d(z,\Gamma)\, dz\, d\bar{z} = \iint_D |f'(\Phi_1(u))|^2\, d(\Phi_1(u),\Gamma)\, |\Phi_1'(u)|^2\, du\, d\bar{u}$$

on utilise ensuite le théorème de Koebe ([21])

$$\frac{1}{4}(1-|z|^2)\, |\Phi_1'(z)| \leq d(\Phi_1(z),\Gamma) \leq (1-|z|^2)\, |\Phi_1'(z)|$$

et il vient

$$\iint_{\Omega_1} |f'(z)|^2\, d(z,\Gamma)\, dz\, d\bar{z} \geq \iint_D |f'(\Phi_1(u))|^2\, |\Phi_1'(u)|^2 (1-|u|)\, du\, d\bar{u} .$$

Posons alors $g(u) = f \circ \Phi_1(u)$ pour $u \in D$ et

$$h(u) = \int_0^u g'(v) \left(\phi_1'(v)\right)^{1/2} dv$$

D'après la caractérisation du type Paley-Littlewood pour $H^2(D)$, le théorème 10 peut encore s'énoncer

$$g \in H^2(D, |\phi_1'|) \iff h \in H^2(D)$$

Montrons cette équivalence.

- Supposons tout d'abord que $g \in H^2(D, |\Phi_1'|)$. Alors $\tilde{g} = g(\Phi_1')^{1/2} \in H^2(D)$ et l'on a

$$h' = g'(\phi_1')^{1/2} = \tilde{g}' - \tilde{g}\left[\log(\phi_1')^{1/2}\right]'$$

et l'inégalité de Pommerenke classique permet de conclure $h \in H^2(D)$.

- Supposons réciproquement que $h \in H^2(D)$. Posons alors $\tilde{h} = \dfrac{h}{(\Phi_1')^{1/2}} \in H^2(D, |\Phi_1'|)$. On a alors

$$g' = \tilde{h}' + \tilde{h}\left(\log(\phi_1')^{1/2}\right)'$$

Ce qui prouve que $g \in H^2(D, |\Phi_1'|)$ d'après l'inégalité de Pommerenke "à poids" du théorème 9.

***

APPENDICE 1

Nous nous proposons de montrer que la condition corde-arc est invariante par le groupe homographique au sens suivant :

Pour toute constante $C > 0$, il existe une constante $C' > 0$ telle que si Γ est une courbe de Jordan vérifiant la condition corde-arc avec la constante C, alors la transformée de Γ par n'importe quelle homographie vérifie la condition corde-arc avec la constante C'.

Comme la condition corde-arc est évidemment invariante par translation et homothétie, il suffit de prouver le résultat pour les inversions.

Soit donc Γ une courbe de Jordan vérifiant la condition corde-arc la constante C et $z_0 \in \mathbb{C}$. Mo trons que Γ', la transformée de Γ par $z \to \frac{1}{z - z_0}$ vérifie encore la condition corde-arc.

Si $z_0 \notin \Gamma$, Γ' est une courbe de Jordan fermée. Si $z_0 \in \Gamma$, Γ' est une courbe de Jordan partageant le plan.

La démonstration qui suit est valable dans les deux cas.

Soit $s \to z(s)$ une paramétrisation normale de Γ telle que

$$|z_0 - z(0)| = d(z_0, \Gamma) = a \quad .$$

Une paramétrisation de Γ' est donnée par $\gamma(x) = \frac{1}{z(x) - z_0}$. Examinons plusieurs cas.

1er cas : $x > \frac{2a}{C}$ $\quad y > \frac{2a}{C}$ $\quad (x, y \in [-\pi, \pi])$

$y > x$.

Alors un calcul simple montre

$$\forall\, s \in [x, y] \qquad \frac{3}{2} s \geq |z(s) - z_0| \geq \frac{C}{2} s$$

et l'on peut écrire

$$\int_x^y |\gamma'(t)|\,dt = \int_x^y \frac{1}{|z(s)-z_0|^2}\,ds \leqslant \frac{4}{c^2}\,\frac{y-x}{xy}$$

et $$|\gamma(x)-\gamma(y)| \geqslant \frac{4c}{9}\,\frac{y-x}{xy}$$

donc $$|\gamma(x)-\gamma(y)| \geqslant \frac{1}{9}c^3 \int_x^y |\gamma'(t)|\,dt$$

2ème cas : $$|x| \leqslant \frac{4a}{c} \qquad |y| \leqslant \frac{4a}{c} \qquad (x<y)$$

alors $$\forall\, s \in [x,y] \qquad a \leqslant |z(s)-z_0| \leqslant \frac{5a}{c}$$

et $$\int_x^y |\gamma'(t)|\,dt \leqslant \frac{y-x}{a^2}$$

tandis que $$|\gamma(x)-\gamma(y)| = \frac{|z(x)-z(y)|}{|z(x)-z_0|\,|z(y)-z_0|}$$

(on suppose ici a suffisamment petit pour que $\widehat{z(x)z(y)} = y-x$), et donc

$$|\gamma(x)-\gamma(y)| \geqslant \frac{c^3}{25}\int_x^y |\gamma'(t)|\,dt$$

3ème cas : $$|x| \leqslant \frac{2a}{c} \qquad y > \frac{4a}{c}$$

alors $$\forall\, s \in [x,y] \qquad |z(s)-z_0|^2 \geqslant k\,(s^2+a^2)$$

et $$\int_x^y |\gamma'(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{k}\int_x^y \frac{1}{s^2+a^2}\,ds \leqslant K/a$$

et $$|\gamma(x)-\gamma(y)| \geqslant K'\,\frac{y-x}{a(y+a)}$$

mais $y+a \leq \frac{5}{2}(y-x)$, et donc :

$$|\gamma(x)-\gamma(y)| \geq K \int_x^y |\gamma'(t)|\,dt$$

4ème cas : $x < -\frac{2a}{c}$ $\quad y > \frac{2a}{c}$

Dans ce cas, on intègre "de l'autre côté"

$$\int_{-\pi}^{x} |\gamma'(t)|\,dt + \int_{y}^{\pi} |\gamma'(t)|\,dt \leq \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{2}{\pi}$$

et $$|\gamma(x)-\gamma(y)| \geq \frac{c \inf(y-x,\ 2\pi-(y-x))}{|x|\ y}$$

et on en déduit encore le résultat en examinant les deux sous-cas :

a) $\widehat{z(x)\,z(y)} = y-x$

Alors

$$\int_{-\pi}^{x} |\gamma'| + \int_{y}^{\pi} |\gamma'| \leq \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{y-x}{|x|y} \leq \frac{1}{c}|\gamma(x)-\gamma(y)|$$

b) $\widehat{z(x)\,z(y)} = 2\pi-(y-x)$

Alors

$$\int_{-\pi}^{x} |\gamma'| + \int_{y}^{\pi} |\gamma'| \leqslant \frac{x+\pi}{\pi|x|} + \frac{\pi-y}{\pi y} \leqslant \frac{1}{c}\,|\gamma(x)-\gamma(y)|$$

et la proposition est démontrée. Ceci nous montre, entre autre, l'équivalence des résultats pour les courbes de Jordan fermées, ou pour celles qui partagent le plan.

***

APPENDICE 2

Nous nous proposons de démontrer ici le corollaire 2 du théorème 2, dont nous rappelons l'énoncé.

Si Γ vérifie la condition corde-arc, alors les courbes Γ_r transformées des cercles de centre 0 et de rayon r par la transformation conforme Φ_1 de D sur Ω_1, l'intérieur de Γ, vérifient uniformément la condition corde-arc pour $0 < r \leq 1$.

Nous allons démontrer cette proposition en utilisant des résultats d'Ahlfors sur les applications quasi-conformes.
On dira que Γ est quasi-circulaire si, pour tout couple (M,N) de points de Γ, on a

(1) $$\text{diamètre}\,(C(M,N)) \leq K\,MN$$

où C(M,N) désigne le plus petit des deux sous-arcs de Γ joignant M et N. Il est immédiat que toute courbe vérifiant la condition corde-arc est quasi-circulaire.

Le résultat d'Ahlfors ([1]) peut alors s'énoncer pour le problème qui nous occupe de façon suivante :

Les courbes Γ_r vérifient uniformément la condition (1) pour $0 < r \leq 1$.
On utilise alors un lemme de Pommerenke ([22]).

Lemme : Soit Γ une courbe de Jordan rectifiable vérifiant (1) avec une constante α. On suppose de plus que la transformation conforme Φ de D sur l'intérieur de Γ vérifie :

(2) $$\forall\, \vartheta \in D \quad \int_{I(\vartheta)} |\phi'(z)|\,|dz| \leq \beta\,(1-|\vartheta|)\,|\phi'(\vartheta)|$$

Alors Γ vérifie la condition corde-arc avec une constante $\leq C\alpha\beta$.

Compte-tenu de ces deux résultats, il suffit donc de prouver que $z \to \Phi(rz)$ vérifie uniformément (2) pour $0 < r \leq 1$.
Mais on peut écrire, d'après ce que l'on sait sur Φ' (voir II)

$$\forall \zeta \in D \quad \int_{I(\zeta)} |\phi'(rz)|\,|dz| \leq \frac{1}{1-r} \int_{I(\zeta)} \left(\int_{I(rz)} |\phi'(u)|\,|du| \right) |dz|$$

on considère alors deux cas pour estimer la dernière intégrale.

1er cas : $1 - r \leq 1 - |\zeta|$.
Il vient alors, en utilisant Fubini,

$$\int_{I(\zeta)} |\phi'(rz)|\,|dz| \leq \int_{I(r\zeta)} |\phi'(u)|\,|du| \leq \alpha(1-r|\zeta|)\,|\phi'(r\zeta)|$$

Mais
$$\frac{1-r|\zeta|}{1-|\zeta|} = 1 + |\zeta| \frac{1-r}{1-|\zeta|} \leq 2$$

et (2) en découle.

2ème cas : $1 - |\zeta| \leq 1 - r$.
On u ilise alors le fait que $I(rz) \subset I(r\zeta)$, et donc

$$\int_{I(\zeta)} |\phi'(rz)|\,|dz| \leq \frac{1-|\zeta|}{1-r} \int_{I(r\zeta)} |\phi'(z)|\,|dz|$$
$$\leq \alpha \frac{1-r|\zeta|}{1-r} (1-|\zeta|)\,|\phi'(r\zeta)|$$

et
$$\frac{1-r|\zeta|}{1-r} \leq \left(1 + r\,\frac{1-|\zeta|}{1-r}\right) \leq 2$$

et (2) en découle encore. C.Q.F.D.

***

APPENDICE 3

Enonçons le résultat de C. Kenig dont nous avons besoin.

Soit $\omega \in A^r(\partial D)$ pour un $r > 1$ et $G(z)$ l'unique fonction extérieure dans D vérifiant $|G(e^{i\theta})| = \omega(e^{i\theta})$ p.p. Pour f holomorphe dans D posons :

$$f^*(e^{i\theta}) = \sup_{\{|z-e^{i\theta}| \leq 2(1-|z|\}} |f(z)|$$

Le théorème suivant est alors vrai :

Théorème (Carlos Kenig [19]) : Pour tout $p \in (0,\infty)$ les trois propositions suivantes sont équivalentes, pour f holomorphe dans D

(1) $\quad f^* \in L^p(\partial D, \omega)$

(2) $\quad \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \omega(e^{i\theta})\, d\theta < +\infty$

(3) $\quad f\,(G)^{1/p} \in H^p(D)$

On peut appliquer ce théorème à notre problème puisque Φ_1' est extérieure. Le théorème est faux si l'on ne suppose pas G extérieure comme le montre le contre-exemple suivant :

$\omega \equiv 1$, et G intérieure quelconque (singulière).

Posons $f = \frac{1}{G}$. Alors $fG \in H^1(D)$, et pourtant $\frac{1}{G}$ n'appartient à aucun H^p pour $p > 0$.

***

REFERENCES

[1] L. AHLFORS, Lectures on quasiconformal mappings, Princeton (1966).

[2] M. BERGER, B. GOSTIAUX, Géométrie différentielle, A. collection U.

[3] A.P. CALDERON, Cauchy integral on Lipschitz curves and related operators, Proc. Nat. Ac. of Sciences 74, 4 (1977), p. 1324-1327.

[4] A.P. CALDERON, Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications, Proc. of the I.C.M. Helsinki 1968, p. 85-96.

[5] R.R. COIFMAN, C. FEFFERMAN, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math. 51 (1974), p. 241-249.

[6] R.R. COIFMAN, G. WEISS, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. of the A.M.S. 83, 4 (1977).

[7] Björn E.J. DAHLBERG, Harmonic functions in Lipschitz domains, Proc. of Symp. in Pure Math., vol. XXXV, Part 1, p. 313-322.

[8] P.L. DÜREN, Theory of H^p spaces, Acade ic Press, New York and London (1970).

[9] P.L. DÜREN, Smirnov domains and conjugate functions, J. of Approximation theory 5 (1972), p. 393-400.

[10] E. B. FABES, C.E. KENIG, The notion of an H^1 space over a C^1 domain, à paraître Ark. Math.

[11] E.B. FABES, C.E. KENIG, U. NERI, Carleson measures, H^1 duality and weighted BMO in non smooth domains, à paraître Indiana J. Math.

[12] C. FEFFERMAN, E.M. STEIN, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), p. 137-193.

[13] J.B. GARNETT, P.W. JONES, The distance in BMO to L^∞, Ann. of Math. 108 (1978), p. 373-393.

[14] T.W. GAMELIN, Uniform algebras, Prentice Hall series in Modern analysis.

[15] G.M. GOLUZIN, Geometric theory of functions of a complex variable, Transl. of Math. monographs, vol. 26, A.M.S. Providence R.I. (1969).

[16] F. JOHN, L. NIRENBERG, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), p. 415-426.

[17] P.W. JONES, Homeomorphisms of the line which conserves BMO, à paraître Comm. Math. Helv.

[18] M.B. KELDYSCH, M. LAVRENT'EV, Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables, Ann. Sci. E.N.S., 3ème sér., t. 54 (1937), p. 1-38.

[19] C.E. KENIG, Weighted Hardy spaces on Lipschitz domains, Amer. J. Math. 102 (1980), p. 129-163.

[20] Y. MEYER, R.R. COIFMAN, Le théorème de Calderón par des méthodes de variable réelle, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, t. 289 (1979), p. 425-428.

[21] Ch. POMMERENKE, Univalent functions, Vandenhoeck and Ruprecht Göttingen (1975).

[22] Ch. POMMERENKE, Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation, Comm. Math. Helv. 62 (1977), p. 591-602.

[23] D. SARASON, Functions of vanishing mean oscillation, Trans. A.M.S. 207 (1975), p. 391-405.

[24] E.M. STEIN, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton (1970).

[25] S.E. WARSCHAWSKI, G.E. SCHOBER, On conformal mappings of certain classes of Jordan domains, Arch. Rat. Mech. analysis 22 (1966), p. 201-209.

ANNEXE

Dans cette annexe nous mettons à profit un théorème d'Ahlfors ([1]) pour donner plusieurs caractérisations de la condition corde-arc et montrer un théorème relié au théorème de Calderón.

Nous considérons uniquement le cas non compact, c'est-à-dire que dans la suite Γ désignera toujours une courbe de Jordan séparant le plan que nous supposerons orientée. Tous les résultats du II restent vrais dans ce cas (voir [4]). Soit Ω_1 l'ouvert "à gauche" de Γ et Ω_2 l'ouvert "à droite". Soient Φ_1 et Φ_2 des transformations conformes de $P_1 = \mathbb{R}^2_+$ sur Ω_1 et de $P_2 = \mathbb{R}^2_-$ sur Ω_2 telles que $\Phi_1(\infty) = \infty$ et $\Phi_2(\infty) = \infty$.

On sait que Φ_1 et Φ_2 se prolongent de façon à définir des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ sur Γ. On peut alors définir $h = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ qui est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$.
Enonçons le théorème fondamental d'Ahlfors :

Théorème 1 : Les conditions suivantes sont équivalentes

(1) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout triplet de points M_1, M_2, M_3 dans cet ordre sur Γ on a

$$M_1M_2 \leq C\, M_1M_3$$

(2) Φ_1 se prolonge en un homéomorphisme quasiconforme de $\mathbb{C}$ tout entier.

(3) La mesure dh est de type homogène.

De plus si l'une de ces trois conditions est vérifiée, h détermine Γ de façon unique (*). On dit alors que Γ est un quasicercle.

Si l'on suppose de plus (et nous le ferons dans toute la suite) que Γ est localement rectifiable et si l'on désigne par z(s) une paramétrisation normale de Γ, alors il existe deux homéomorphismes croissants h_1 et h_2 de $\mathbb{R}$ absolument continus tels que

---

(*) A une similitude près.

$$z(s) = \phi_i(h_i(s))$$

et l'on a $h = h_2 \circ h_1^{-1}$ comme on le vérifie facilement.

Evidemment, d'après la condition (1) du théorème 1 les courbes vérifiant la condition corde-arc sont des cas particuliers de quasicercles. Etudions de plus près ces deux notions.

Proposition 1 : Γ est corde-arc si et seulement si Γ est un quasicercle, Φ_1' est extérieure et $|\Phi_1'| \in A^\infty(\mathbf{R})$.

Preuve : Ce théorème a été montré par C. Kenig et D. Jerison dans [4]. Nous proposons ici une autre démonstration mais qui sera valable uniquement pour le cas compact.
La partie directe a déjà été démontrée dans le II. Pour la réciproque, nous allons utiliser la caractérisation de Pommerenke [6] à savoir,
Γ (compact) est corde-arc si et seulement si Γ est un quasicercle et s'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall\, \zeta \in D \qquad \frac{1}{|I(\zeta)|} \int_{I(\zeta)} |\phi_1'(z)|\,|dz| \leq C\,|\phi_1'(\zeta)|$$

Passons à la démonstration. Puisque $|\Phi_1'| \in A^\infty(\partial D)$, ce poids vérifie l'inégalité de Hölder inverse (voir [7])

$$\frac{1}{|I(\zeta)|} \int_{I(\zeta)} |\phi_1'(z)|\,|dz| \leq C \exp\left(\frac{1}{|I(\zeta)|} \int_{I(\zeta)} \log |\phi_1'(z)|\,|dz| \right)$$

Mais Φ_1' extérieur et par conséquent

$$\log |\phi_1'(\zeta)| = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \log |\phi_1'(z)|\, \frac{1-|\zeta|^2}{|z-\zeta|^2}\,|dz|$$

et donc

$$\frac{1}{|I(\zeta)|} \int_{I(\zeta)} |\phi_1'(z)|\,|dz| \leq C\,|\phi_1'(\zeta)| \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(\log |\phi_1'(z)| - m_{I(\zeta)} |\phi_1'|\right) \frac{1-|\zeta|^2}{|z-\zeta|^2}\,|dz| \right\}$$

mais $\log|\Phi_1'| \in \mathrm{BMO}(\mathbb{T})$ et par conséquent on majore facilement l'intégrale à l'intérieur de la parenthèse par $C\,\|\log|\Phi_1'|\|_{\mathrm{BMO}}$. La proposition 1

s'en déduit.

Corollaire 1 : Γ est corde-arc si et seulement si Φ_1' et Φ_2' sont extérieures, $|\Phi_1'|$ et $|\Phi_2'|$ appartiennent à $A^\infty(\mathbb{R})$.

Démonstration : Là encore, le sens direct a déjà été montré. Supposons alors Φ_1', Φ_2' extérieures, $|\Phi_1'|$, $|\Phi_2'| \in A^\infty$. Alors $h = h_2 \circ h_1^{-1}$ appartient au groupe $\mathcal{G}$ et ceci implique notamment que $h'(x)dx$ est une mesure de type homogène. Par le théorème 1, on en déduit que Γ est un quasicercle et l'on conclut en utilisant la proposition 1.

Avant d'énoncer le corollaire 2 nous allons introduire, comme au II, les espaces

$$BMOA(\Omega_i) = \{ F : \Omega_i \to \mathbb{C} \ ; \ F \circ \phi_i \in BMOA(P_i) \}$$

et BMO(Γ) désigne toujours BMO(ds).

Corollaire 2 : Γ est corde-arc si et seulement si Φ_i' est extérieure et $BMOA(\Omega_i) \subset BMO(\Gamma)$ $(i = 1,2)$.

Comme $BMOA(\Omega_i)$ (identifié avec ses valeurs au bord), c'est aussi $V_{h_i}(BMOA(P_i))$ où $V_{h_i} : f \to f \circ h_i$ et que $BMO(\mathbb{R})$ est somme directe de $BMOA(P_1)$ et de $BMOA(P_2) = \overline{BMOA(P_1)}$ on en déduit que V_{h_i} préserve $BMO(\mathbb{R})$ $(i = 1$ ou $2)$. D'après le théorème de P. Jones [5] on en déduit que $h_i \in \mathcal{G}$ et le corollaire 1 permet de conclure.

Venons-en à présent au lien avec le théorème de Calderón. Coifman et Meyer ([2]) ont montré que si Γ vérifie la condition corde-arc avec une petite constante, alors le théorème de Calderon est vrai c'est-à-dire que $L^2(\Gamma)$ est somme directe de $H^2(\Omega_1)$ et de $H^2(\Omega_2)$ et de plus ces deux espaces sont presque orthogonaux au sens que

$$\text{angle } (H^2(\Omega_i), H^2(P_i)) \text{ est très petit .}$$

Nous nous proposons à présent d'établir une sorte de réciproque à ce théorème. Introduisons quelques notations.

Soit H un espace de Hilbert, E et F deux sous-espaces vectoriels

fermés de H. Soient π_E et π_F les projections orthogonales sur E et F respectivement. On a alors le

Lemme : Sont équivalents

(1) H est somme directe topologique de E et F.

(2) $\|\pi_E + \pi_F - I\| < 1$.

Nous dirons de plus que E et F sont ε-presque orthogonaux si

$$\|\pi_E + \pi_F - I\| \leq \varepsilon < 1 \quad .$$

Théorème 2 : Il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que si $\varepsilon < \varepsilon_o$ et si $H^2(\Omega_1)$ et $H^2(\Omega_2)$ sont ε-presque orthogonaux alors Γ vérifie la condition corde-arc avec une petite constante.

Preuve : Soit U_{h_i} l'opérateur unitaire de L^2 défini par

$$U_{h_i} f = f \circ h_i \sqrt{h_i'}$$

Alors un calcul facile montre que l'hypothèse $H^2(\Omega_1)$ et $H^2(\Omega_2)$ ε-presque orthogonaux se traduit par

$$\| U_{h_1} H U_{h_1}^{-1} - U_{h_2} H U_{h_2}^{-1} \| \leq \varepsilon$$

ou encore

$$\| H - U_h H U_h^{-1} \| \leq \varepsilon$$

avec $h = h_2 \circ h_1^{-1}$.

On applique à présent un théorème de G. David et J.L. Journé [3] affirmant que si ε est assez petit, alors $h \in \mathcal{G}$ et

$$\| \log h' \|_{BMO} \leq C \varepsilon$$

Nous nous proposons de montrer que ceci implique (au moins pour ε assez petit) que Γ vérifie corde-arc avec une petite constante.

Pour ce faire nous allons tout d'abord supposer "a priori" que Γ vérifie la condition corde-arc.

Soit z(s) une paramétrisation normale de Γ. Alors $z'(s) = e^{ib(s)}$ où

$$b = - V_{h_1} H V_{h_1}^{-1} (\log h_1') = V_{h_2} H V_{h_2}^{-1} (\log h_2')$$

et

$$\log h_1' = V_{h_1} H V_{h_1}^{-1} V_{h_2} H V_{h_2}^{-1} (\log h_2')$$

$$\Leftrightarrow \quad \log h_1' \circ h_1^{-1} = H V_h H V_h^{-1} (\log h_2' \circ h_1^{-1})$$

ensuite on écrit

$$\begin{aligned} - \quad \log h' &= \log h_2' \circ h_1^{-1} - \log h_1' \circ h_1^{-1} \\ - \quad &= (V_h H V_h^{-1} H - I)(\log h_1' \circ h_1^{-1}) \\ - \quad &= (V_h H V_h^{-1} - H)(H a_1) - 2a_1 \end{aligned}$$

où l'on a posé $a_1 = \log h_1' \circ h_1^{-1}$. Finalement on peut écrire

$$-\frac{1}{2} \log h' = (I - T_h)(a_1)$$

avec $$T_h = \frac{1}{2} (V_h H V_h^{-1} - H) \circ H$$

Mais $\|T_h\|_{BMO,BMO} \leq C \|\log h'\|_{BMO}$ (voir [2]) et donc, pour ε assez petit $\|T_h\| \leq 1/2$ et l'opérateur $I - T_h$ est alors inversible et l'on a

$$a_1 = (I - T_h)^{-1} (-\tfrac{1}{2} \log h')$$

Comme $a_1 = \log h_1' \circ h_1^{-1} = \log |\Phi_1'|$ on en déduit que $\|\log \Phi_1'\|_{BMO} \leq C\varepsilon$ et il s'en déduit que la constante corde-arc est assez petite (voir [2]).
Il faut maintenant s'affranchir de l'hypothèse "a priori" que Γ est corde-arc. Pour ce faire nous allons reprendre à l'envers tous les calculs effectués ci-dessus.
Posons $a_1 = (I - T_h)^{-1}(-1/2 \log h')$, alors si ε est assez petit, il en sera de même de $\|a_1\|_{BMO}$ et par conséquent il existe une transformation conforme Φ_1 définie sur P_1 telle que

$$a_1 = - \log |\phi_1'| \Big|_{\mathbb{R}}$$

Il est clair qu'alors $\Gamma = \Phi_1(\mathbb{R})$ vérifie corde-arc avec une petite constante.
h_1 et Φ_1 étant choisis, il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ h_2 tel que

$$\log h_2' = V_{h_1} V_h H V_h^{-1} H (a_1)$$

et l'on vérifie alors que l'on a (en choisissant les "bons représentants" pour h et h_2 modulo les fonctions affines)

$$h = h_2 \circ h_1^{-1}$$

Là encore $\|\log (h_2^{-1})'\|_{BMO}$ est petite et il existe donc $\Phi_2 : P_2 \to \mathbb{C}$ conforme telle que

$$|\Phi_2'| = (h_2^{-1})'$$

(ce qui définit Φ_2 à une rotation près).
En remontant encore les calculs on vérifie

$$V_{h_1} H V_{h_1}^{-1} (\log h_1') = - V_{h_2} H V_{h_2}^{-1} (\log h_2')$$

ce qui est exactement l'angle que fait la tangente paramétré par la longueur d'arc pour $\Phi_1(\mathbb{R})$ et $\Phi_2(\mathbb{R})$, on peut donc choisir Φ_2 de sorte que $\Phi_1(\mathbb{R}) = \Phi_2(\mathbb{R})$ et l'on a alors

$$h = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$$

L'unicité de la courbe Γ étant assurée par le théorème d'Ahlfors, le théorème 2 est ainsi entièrement démontré.

***

REFERENCES

[1] L. AHLFORS, Lectures on quasi-formal mappings, Princeton 1966.

[2] R.R. COIFMAN, Y. MEYER, Le théorème de Calderón par des méthodes de variable réelle, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, t. 289 (1979), p. 425-428.

[3] G. DAVID, J.L. JOURNE, Thèses.

[4] D.S. JERISON et C.E. KENIG, Hardy spaces, A_∞ and singular integrals on chord-arc domains.

[5] P.W. JONES, Homeomorphisms of the line which preserve BMO, à paraître Comm. Math. Helv.

[6] Ch. POMMERENKE, Schlichte Funktionen une BMOA, Comm. Math. Helv. 1978.

[7] H. REIMANN, T. RYCHENER, Funktionen beschranker mittlerer oszillation, Springer-Verlag Lecture Notes No 487 (1975).